Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Soluciones nodales no radiales para una ecuación elíptica no lineal en $\mathbb{R}^N$

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemático

presenta:

Luis Edwin Aguilar Anzures

Tutora:

Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Agradecimientos

Bien, en primer lugar quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la Doctora Mónica Clapp por aceptar ser mi tutora y por guiarme con paciencia e interés durante la escritura de esta tesis. No pienso solamente en la suma de conocimientos que extraje de sus *legendarios* cursos, sino sobre todo en el apoyo y la motivación que incondicionalmente me brindó. A los que hemos tenido la fortuna de ser sus alumnos, nos ha demostrado que somos capaces de mucho más de lo que la carrera exige de nosotros y esto nos ha cambiado para siempre.

En la misma línea quiero agradecer a Daniel Labardini y a Christof Geiss por abrirme las puertas a su grupo de trabajo y por enseñarme la cultura de la calidad, del compañerismo y del trabajo bien hecho. Les agradezco no sólo por haberme permitido ser testigo de su enriquecedora *cofradía de Representaciones*, sino más bien por las charlas, los consejos y el tiempo, que generosamente y sin reservas, compartieron conmigo dentro y fuera del espacio académico. Si es posible agradecer la amistad y el afecto, debo decir que estoy en deuda con ustedes. Gracias por creer en mi.

Creo que tuve la fortuna de hallar cursos impartidos por personas maravillosas. En particular quiero agradecer a Laura Ortíz, a Alberto Saldaña y a Pierre Bayard, por la increíble calidad y pasión que le imprimieron a sus cursos. También debo un enorme agradecimiento a Carlos Erick y a Judith Campos, por las observaciones que complementaron esta tesis.

Más personalmente quiero agradecer a mi hermano y mis papás, por su apoyo incondicional. Igualmente agradezco a Jorge Viveros y Sitka, por la fe que tuvieron en mi desde el inicio. A Rocío Leonel, por haberme dado mi primer trabajo matemático. Ustedes me enseñaron a ver aquello por lo que hay que luchar. A mis amigos Diego, Ayax, Luis, Nadia y Phani, quienes hicieron de la facultad un hogar, incluso en los momentos más oscuros. Es gracias a ustedes que continúe viviendo en tres dimensiones, con un horizonte real.

Finalmente, agradezco a la UNAM, por haberme acogido estos 4 años y por todas las oportunidades que me ha dado, en particular por el apoyo económico otorgado para la elaboración de esta tesis a través de una beca de titulación con cargo al proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN100718.

“Por mi raza hablará el espíritu”

EDWIN AGUILAR ANZURES

Índice general

Introducción

El problema a considerar es el siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{0.1}$$

con $p \in (2, 2^*)$, donde $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

El objetivo de esta tesis es probar el siguiente resultado.

Teorema 0.1. *Si $N \geq 4$ el problema (0.1) tiene una solución no radial que cambia de signo.*

Este resultado fue demostrado en por Bartsch y Willem en [1] para $N = 4$ y $N \geq 6$, y por Lorca y Ubilla en [6] para $N = 5$, sin embargo la demostración que proponemos aquí sigue el método expuesto en [3], que esbozamos a continuación.

Sean Ω un dominio suave y acotado en $\mathbb{R}^N$ y $\varepsilon > 0$. Estudiaremos al problema

$$(\wp_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema es interesante en sí mismo porque surge como un modelo para la formación de patrones en diversas ramas de la ciencia, por ejemplo, la biología: este problema ocurre en el estudio de soluciones estacionarias al sistema de Keller-Segel o en el sistema Gierer-Meinhardt, en el estudio de formación de ciertos patrones biológicos [7].

En [8] Ni y Wei probaron que las soluciones de energía mínima del problema $(\wp_\varepsilon)$, cuando $\varepsilon \to 0$, se concentran en un único punto, ubicado a distancia máxima de la frontera, y desarrollan un “pico” cuyo perfil asintótico es un reescalamiento de la solución fundamental (positiva y radial) del problema límite (0.1).

En esta tesis veremos que es posible encontrar una solución no radial que cambia de signo del problema (0.1), que ocurre como un perfil asintótico de soluciones del problema $(\wp_\varepsilon)$, que se concentran en un solo punto. Para esto, escribimos como

$$\|u\|_\varepsilon := \left(\frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\varepsilon^2|\nabla u|^2 + u^2\right]\right)^{1/2}$$

a la norma en $H^1(\mathbb{R}^N)$ asociada al problema $(\wp_\varepsilon)$. Entonces, demostramos el siguiente resultado.

Teorema 0.2. *Si Ω es una bola y $N \geq 4$, existen una sucesión de reales positivos ε_k que converge a cero, una solución u_k que cambia de signo del problema $(\wp_{\varepsilon_k})$, un punto $\xi_k \in \Omega$ y una solución $\widehat{u}$ del problema (0.1) que cambia de signo con las siguientes propiedades*

(a) $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1} \operatorname{dist}(\xi_k, \partial\Omega) = \infty$,

(b) $\lim_{k\to\infty} \left\|u_k - \widehat{u}(\varepsilon_k^{-1}(\cdot - \xi_k))\right\|_{\varepsilon_k} = 0.$

Para demostrarlo hacemos uso de la estructura variacional del problema (0.1) tanto como del problema $(\wp_\varepsilon)$, además usamos argumentos de compacidad por concentración, con simetrías involucradas.

Esta tesis se divide en tres capítulos: en el **Capítulo 1** damos una descripción detallada del grupo de simetrías que jugará un papel importante en la prueba del Teorema 0.2. En el **Capítulo 2** veremos que el problema $(\wp_\varepsilon)$ admite una formulación variacional, la cual se describe detalladamente. Finalmente, en el **Capítulo 3** demostramos que el problema $(\wp_\varepsilon)$ tiene soluciones no triviales que son no radiales y que cambian de signo; además analizamos las propiedades simétricas de los puntos de concentración y de las soluciones del problemas (0.1) que ocurren como perfil asintótico de soluciones simétricas del problema $(\wp_\varepsilon)$. Los Teoremas 0.2 y 0.1 serán una consecuencia del resultado principal de este capítulo.

Capítulo 1

Las simetrías

Empezamos este capítulo estableciendo las bases que nos permitirán entender y expresar de manera concreta la noción de que una solución a una ecuación diferencial tenga *simetrías.* Finalmente, para encauzar nuestros esfuerzos, nos enfocaremos en un tipo particular de simetrías y expondremos una de sus propiedades geométricas.

1.1 Nociones básicas

Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ el espacio de funciones lineales de $\mathbb{R}^N$ en sí mismo, con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} := \sup_{v\in\mathbb{R}^N, v\neq 0} \frac{\|Tv\|_{\mathbb{R}^N}}{\|v\|_{\mathbb{R}^N}}.$$

Definición 1.1. *El grupo ortogonal es el grupo*

$$O(N) := \{g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \ : \ \text{para cada } x \in \mathbb{R}^N,\ |gx| = |x|\}$$

de las isometrías lineales de $\mathbb{R}^N$, con la operación dada por la composición de funciones.

El grupo $O(N)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$, sin embargo la estructura que nos interesa estudiar en este trabajo es la de grupo per se, particularmente, la estructura de ciertos subgrupos. Antes de llegar a este punto, debemos introducir algunos conceptos básicos.

Si G es un subgrupo de $O(N)$ y $x \in \mathbb{R}^N$, la $G-$órbita de x es el conjunto

$$Gx := \{gx \ : \ g \in G\}$$

y el subgrupo de G-isotropía de x es el conjunto

$$G_x := \{g \in G \ : \ gx = x\}.$$

Proposición 1.2. *Sean G un subgrupo de $O(N)$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Si la $G-$órbita de x consiste solamente de un punto, entonces $G = G_x$.*

Demostración. Primero notemos que la G-órbita de x siempre tiene a x por elemento, pues como G es un subgrupo de $O(N)$, este contiene a la función identidad de $\mathbb{R}^N$. Así, al aplicar este elemento del grupo a x, obtenemos exactamente a x.

Entonces, si Gx tiene un sólo elemento, debe ocurrir que $Gx = \{x\}$. Aplicando la definición, obtenemos que, para cada $g \in G$, $gx = x$. Esto demuestra que G_x contiene a cada uno de los elementos de G, siendo la igualdad $G = G_x$ la consecuencia de este hecho.

□

En realidad, existe una relación más estrecha entre los puntos de la G-órbita de un punto en $\mathbb{R}^N$ y los elementos del grupo de isotropía de dicho punto. Dicha relación se establece en el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *Sea G un subgrupo de $O(N)$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, hay una biyección entre Gx y G/G_x, dada por $gx \mapsto gG_x$.*

Demostración. Primero notemos que, dados dos elementos de Gx, digamos gx y $g'x$, si ocurre que $gx = g'x$, entonces $g^{-1}g'x = x$. Esto nos dice que $g^{-1}g' \in G_x$ y, por lo tanto, que $gG_x = g'G_x$. Con esto, vemos que la asignación $gx \mapsto gG_x$ es una función bien definida.

De manera recíproca, si ocurre que $gG_x = g'G_x$, entonces $g^{-1}g' \in G_x$. Este hecho significa que $g^{-1}g'x = x$, que es equivalente a que $g'x = gx$. Esto demuestra que diferentes clases laterales en G/G_x, corresponden a diferentes puntos en Gx.

Finalmente, toda clase lateral está asociada a un punto en la Gx, pues, si $g'G_x$ es una clase lateral, esta corresponde al punto $g'x$. Esto nos dice que la correspondencia dada por $gx \mapsto gG_x$ es suprayectiva.

La conclusión es que la regla de correspondencia dada por $gx \mapsto gG_x$ es, en efecto, biyectiva.

□

Una consecuencia de este hecho es que la G-órbita de un punto x tendrá la misma cardinalidad que el cociente G/G_x.

1.2 Un grupo particular

Sea G un subgrupo cerrado del grupo $O(N)$ de isometrías lineales de $\mathbb{R}^N$ con las siguientes propiedades:

(G_1) $|G| = \infty$,

(G_2) Para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, o bien $G_\xi = G$, o bien $|G_\xi| = 1$,

(G_3) Existe un epimomorfismo continuo $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$,

La Proposición 1.3 permite reescribir a (G_2) como sigue: (G_2) Para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, o bien $G\xi = \{\xi\}$, o bien la función $G \to G\xi$ dada por $g \mapsto g\xi$ es biyectiva.

Nos interesa estudiar las funciones u definida en $\mathbb{R}^N$ que satisfagan

$$u(\gamma x) = \phi(\gamma)u(x) \qquad \forall \gamma \in G,\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

A una función u con esta propiedad la llamamos $\phi-$**equivariante**. Es importante notar que si $\phi(\gamma) = -1$ y u es ϕ-equivariante entonces, $u(\gamma x) = -u(x)$. Esto nos dice que si $u \neq 0$ entonces, u cambia de signo.

Ejemplo 1.4. *Para $N \geq 4$ existen grupos G que satisfacen* $(G_1), (G_2), (G_3)$.

Identifiquemos a $\mathbb{R}^N$ con $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$. Dado un número complejo de módulo uno, $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos una la isometría lineal $h_\lambda : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$ dada por

$$h_\lambda(z_1, z_2, x) := (\lambda z_1, \lambda z_2, x) \quad \text{para cada } z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}^{N-4}.$$

Sea Σ el conjunto de isometrías lineales de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$ definidas a partir de números complejos de módulo uno de la forma anterior, i.e.,

$$\Sigma = \{h_\lambda : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4} \ :\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}.$$

El conjunto Σ es un subgrupo de $O(N)$, donde ocurre que para cada par de números complejos de módulo uno, digamos, λ y α, tenemos las identidades $h_\lambda h_\alpha = h_{\lambda\alpha}$ y $(h_\lambda)^{-1} = h_{\overline{\lambda}}$.

También consideremos a la isometría lineal $\varrho : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$ definida como

$$\varrho(z_1, z_2, x) := (-\overline{z}_2, \overline{z}_1, x) \quad \text{para cada } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ y } x \in \mathbb{R}^{N-4}.$$

Esta isometría lineal es un elemento de orden cuatro de $O(N)$.

Sea G el subgrupo de $O(N)$ generado por el conjunto $\Sigma \cup \{\varrho\}$. Para dar una descripción más explícita de este grupo tomemos $(z_1, z_2, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ de módulo uno. Entonces,

$$\begin{aligned}\varrho h_\lambda(z_1, z_2, x) &= \varrho(\lambda z_1, \lambda z_2, x) = (-\overline{\lambda z_2}, \overline{\lambda z_1}, x)\\ &= (-\overline{\lambda}\,\overline{z_2}, \overline{\lambda}\,\overline{z_1}, x) = h_{\overline{\lambda}}(-\overline{z_2}, \overline{z_1}, x) = h_{\overline{\lambda}}\varrho(z_1, z_2, x).\end{aligned}$$

Esto demuestra que, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ de módulo uno,

$$\varrho h_\lambda = h_{\overline{\lambda}}\varrho.$$

Una aplicación importante de la identidad anterior es que nos permite dar una descripción explícita de los elementos de G, a saber

$$G = \{\varrho^n h_\lambda \;:\; \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\lambda| = 1 \text{ y } \; 1 \leq n \leq 4\}.$$

Otra identidad importante es

$$\varrho^2 = h_{-1}.$$

Esta se satisface pues, para cada $(z_1, z_2, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$,

$$\begin{aligned}\varrho^2(z_1, z_2, x) &= \varrho(-\overline{z_2}, \overline{z_1}, x) = (-\overline{\overline{z_1}}, \overline{-\overline{z_2}}, x)\\ &= (-z_1, -z_2, x) = ((-1)z_1, ((-1)z_2, x) = h_{-1}(z_1, z_2, x).\end{aligned}$$

Consideremos también al homomorfismo $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$ dado por $\phi(\varrho) = -1$ y, si $\gamma \in \Sigma$, $\phi(\gamma) = 1$. Este grupo y este homomorfismo satisfacen las propiedades deseadas. Las propiedades (G_1) y (G_3) son claras. No así (G_2). Para ver que esta última propiedad se satisface, fijemos $(z_1, z_2, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$. Por la manera en la que los elementos de Σ y ϱ están definidos, tenemos que si z_1 y z_2 son ambos cero, entonces $G(z_1, z_2, x) = \{(z_1, z_2, x)\}$. Ahora, si z_1, o bien z_2 no es el número complejo cero, la función $G \to G(z_1, z_2, x)$ dada por $g \mapsto g(z_1, z_2, x)$ es inyectiva.

Veamos una demostración de la última afirmación del párrafo anterior. Para esto, tomemos $(z_1, z_2, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N-4}$ tal que z_1 o z_2 no es el número complejo cero. Sean $m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, ambos, de módulo uno. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer igualmente que $n \leq m$. Ahora, supongamos que $\varrho^n h_{\lambda_1}(z_1, z_2, x) = \varrho^m h_{\lambda_2}(z_1, z_2, x)$.

Esta igualdad es equivalente a

$$h_{\overline{\lambda_1}}\varrho^{m-n}h_{\lambda_2}(z_1, z_2, x) = (z_1, z_2, x). \tag{1.2}$$

No puede ser que $m - n = 1$. De ocurrir $m - n = 1$, tendríamos

$$h_{\overline{\lambda_1}}\varrho^{m-n}h_{\lambda_2}(z_1, z_2, x) = h_{\overline{\lambda_1}}h_{\overline{\lambda_2}}\varrho(z_1, z_2, x) = h_{\overline{\lambda_1\lambda_2}}(-\overline{z_2}, \overline{z_1}, x).$$

De esta identidad y de la identidad (1.2) se sigue que $z_1 = -\overline{\lambda_1\lambda_2}\,\overline{z_2}$ y $z_2 = \overline{\lambda_1\lambda_2}\,\overline{z_1}$. Así, $z_1 = -z_1$ y, por lo tanto, $z_1 = 0$. Pero, $z_2 = \overline{\lambda_1\lambda_2}\,\overline{z_1} = 0$. Lo cual es imposible, pues contradice la hipótesis de que z_1 o bien z_2 no es cero. Un argumento similar demuestra que que $m - n \neq 3$. Luego, si $m - n = 2$, usando que $\varrho^2 = h_{-1}$, tenemos

$$h_{\overline{\lambda_1}}\varrho^{m-n}h_{\lambda_2}(z_1, z_2, x) = h_{\overline{\lambda_1}}h_{-1}h_{\lambda_2}(z_1, z_2, x) = (-\overline{\lambda_1}\lambda_2 z_1, -\overline{\lambda_1}\lambda_2 z_2, x).$$

Usando la identidad (1.2) y que z_1 o z_2 no es cero, se sigue que $-\overline{\lambda_1}\lambda_2 = 1$ y, por lo tanto que $-\lambda_2 = \lambda_1$. De esta forma,

$$\varrho^n h_{\lambda_1} = \varrho^n h_{-\lambda_2} = \varrho^n h_{-1}h_{\lambda_2} = \varrho^n\varrho^2 h_{\lambda_2} = \varrho^m h_{\lambda_2}.$$

Finalmente, si $m - n = 0$, usando la identidad (1.2) y que z_1 o z_2 no es cero, se sigue que $\overline{\lambda_1}\lambda_2 = 1$ y, consecuentemente, que $\lambda_2 = \lambda_1$. De esta forma, $\varrho^n h_{\lambda_1} = \varrho^n h_{-\lambda_2} = \varrho^m h_{\lambda_2}$. Esto termina la demostración de que la función $G \to G(z_1, z_1, x)$ dada por $g \mapsto g(z_1, z_2, x)$ es uno a uno siempre que z_1 o z_2 no sea el número complejo cero. $\square$

Tenemos el siguiente resultado que nos ayudará a localizar los puntos de concentración de las soluciones simétricas del problema $(\wp_\varepsilon)$.

Lema 1.5. *Si G no es el grupo trivial y satisface (G_2), entonces, dada una sucesión (y_k) en $\mathbb{R}^N$ existen una sucesión (ζ_k) en $\mathbb{R}^N$ y una constante positiva C tales que, pasando a una subsucesión,*

$$\operatorname{dist}(\zeta_k, Gy_k) < C \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

y se cumple que

(i) o bien $G\zeta_k = \{\zeta_k\}$ para todo k,

(ii) o bien $|G_{\zeta_k}| = 1$ para todo k, y $|g\zeta_k - h\zeta_k| \to \infty$ para cualesquiera $g, h \in G$ con

$g \neq h$.

Demostración. Primero recordemos que el espacio de G-puntos fijos de $\mathbb{R}^N$ es

$$(\mathbb{R}^N)^G = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ gx = x \text{ para cada } g \in G\}.$$

Sea $V = (\mathbb{R}^N)^G$. Veamos que V es un $\mathbb{R}-$subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in V$ son dados, usando que cada elemento de G es una transformación lineal de $\mathbb{R}^N$ vemos que, para cada $g \in G$,

$$g(\lambda x + y) = \lambda gx + gy = \lambda x + y.$$

Además, $0 \in V$, pues todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^N$ lo fijan. Esto demuestra que V es un $\mathbb{R}-$subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$.

Denotamos por ξ_k a la proyección ortogonal de y_k sobre V. Procedamos por casos. Primero supongamos que la sucesión $(\text{dist}(y_k, V))_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada por una constante $C > 0$, es decir, que la constante C tiene la propiedad de que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{dist}(y_k, V) < C.$$

En este caso, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que satisface las siguientes dos propiedades simultáneamente:

- Cada elemento de la sucesión tiene un $G-$subgrupo de isotropía trivial, es decir

  $$\text{para cada } k \in \mathbb{N}, \quad G_{\xi_k} = G.$$

  Lo que es equivalente a que

  $$\text{para cada } k \in \mathbb{N}, \quad G\xi_k = \{\xi_k\}.$$

  Esto es debido a que $\xi_k \in (\mathbb{R}^N)^G$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

- Para cada $g \in G$, como g es una isometría,

  $$|gy_k - \xi_k| = |gy_k - g\xi_k| = |y_k - \xi_k| < C.$$

  Esto demuestra que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\text{dist}(\xi_k, Gy_k) < C$.

Tomando $\zeta_k := \xi_k$ obtenemos una sucesión que satisface la condición *(i)*.

Ahora supongamos que la sucesión $(\text{dist}(y_k, V))_{k\in\mathbb{N}}$ no está acotada. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escribamos $x_k := y_k - \xi_k$. Como primeras observaciones, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in V^\perp$ y que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no está acotada. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $x_k \neq 0$ para todo k. Entonces, como la sucesión $(\frac{x_k}{|x_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada, tiene una subsucesión convergente, digamos $(\frac{x_{k_j}}{|x_{k_j}|})_{j\in\mathbb{N}}$ y que converge a z en $\mathbb{R}^N$.

Sean $g, h \in G$ distintos. Escribamos $d := |gz - hz|$. Como $z \notin V$, la propiedad (G_2) asegura que $gz \neq hz$. Por tanto, $d \neq 0$. Usando la continuidad de g y h y la convergencia de la sucesión $(\frac{x_{k_j}}{|x_{k_j}|})_{j\in\mathbb{N}}$ elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| g\frac{x_{k_j}}{\left|x_{k_j}\right|} - h\frac{x_{k_j}}{\left|x_{k_j}\right|} \right| > \frac{d}{2}, \quad \text{si } j \geq n.$$

De lo que deducimos que

$$\left|gx_{k_j} - hx_{k_j}\right| > \frac{d\left|x_{k_j}\right|}{2}, \quad \text{si } j \geq n.$$

Puesto que $\left|x_{k_j}\right| \to \infty$ cuando $j \to \infty$, vemos que

$$\left|gy_{k_j} - hy_{k_j}\right| = \left|gx_{k_j} - hx_{k_j}\right| \to \infty \text{ cuando } j \to \infty.$$

Ya que y_{k_j} no pertenece a V, la propiedad (G_2) asegura que $\left|Gy_{k_j}\right| = 1$. Por lo tanto, en este caso, basta definir a la sucesión $\zeta_k = y_k$.

En resumen, si la sucesión $(\text{dist}(y_k, V))_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada, elegimos a $\zeta_k := \xi_k$ y si la sucesión $(\text{dist}(y_k, V))_{k\in\mathbb{N}}$ no es acotada, elegimos a $\zeta_k := y_k$. $\square$

Capítulo 2

Formulación variacional del problema

En el estudio de ecuaciones en derivadas parciales surge de manera natural la necesidad de considerar normas que involucren tanto a la función misma como a sus derivadas. Sabemos que el espacio de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ es el espacio adecuado para estudiar la existencia de soluciones débiles. Puede ocurrir que los puntos críticos de ciertos funcionales en el espacio de Sobolev resulten ser soluciones débiles de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Entonces, en estos casos, estudiar la existencia de soluciones débiles es equivalente a estudiar las propiedades de cierto funcional en el espacio de Sobolev. Si una ecuación tiene asociado un funcional con esta propiedad, decimos que tiene una una *formulación variacional*.

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y para $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$ denotamos por

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + u^2 \right] \right)^{1/2} \qquad \text{y} \qquad |v|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La función $\|\cdot\|$ es la norma de Sobolev usual en $H^1(\mathbb{R})$ y la función $|\cdot|_p$ es la norma de Lebesgue usual en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Un resultado clave para la teoría variacional de ciertas ecuaciones diferenciales es el siguiente.

Teorema 2.1 (de encaje de Sobolev). *Para cada $p \in [2, 2^*]$ se tiene $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ y está inclusión es continua, es decir, existe una constante $C_{N,p} > 0$, que depende únicamente de N y de p, tal que*

$$|u|_p \leq C_{N,p} \|u\| \qquad \textit{para cada } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. La prueba puede ser consultada en [2, Teorema 17.8]. □

Sean Ω un dominio acotado y suave en $\mathbb{R}^N$, $p \in (2, 2^*)$ y $\varepsilon > 0$. Como ya mencionamos, estudiaremos al problema

$$(\wp_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

En este capítulo veremos que el problema $(\wp_\varepsilon)$ tiene una formulación variacional. Más aún, veremos que basta restringir al funcional asociado el problema a cierto subespacio de $H^1(\mathbb{R}^N)$ para estudiar las soluciones con ciertas simetrías.

2.1 Las normas asociadas al problema

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ denotamos por

$$\|u\|_\varepsilon := \left(\frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + u^2 \right] \right)^{1/2}, \qquad |u|_{\varepsilon,p} := \left(\frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \right)^{1/p}.$$

Proposición 2.2. *Las funciones $\|\cdot\|_\varepsilon$ y $|\cdot|_{\varepsilon,p}$ definen normas equivalentes a la norma usual de Sobolev $\|\cdot\|$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y a la norma de Lebesgue $|\cdot|_p$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, respectivamente.*

Demostración. Para $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ definimos

$$\langle u, v \rangle_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon^2 \nabla u \cdot \nabla v + uv]. \tag{2.1}$$

Veremos que esta función define un producto interno en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Este producto interno induce a la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ pues

$$\|u\|_\varepsilon = \sqrt{\langle u, u \rangle_\varepsilon} \qquad \text{para cada } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para ver que la función definida en (2.1) es un producto interno, tomemos $u, v, w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La simetría es inmediata de la definición pues

$$\langle u, v \rangle_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon^2 \nabla u \cdot \nabla v + uv] = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon^2 \nabla v \cdot \nabla u + vu] = \langle v, u \rangle_\varepsilon.$$

La bilinealidad se obtiene de la linealidad de la integral y de las derivadas parciales débiles, pues

$$\begin{aligned}
\langle u, v+\lambda w\rangle_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}[\varepsilon^2\nabla u\cdot\nabla(v+\lambda w)+u(v+\lambda w)]\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}[\varepsilon^2\nabla u\cdot(\nabla v+\lambda\nabla w)+(uv+\lambda uw)]\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}[\varepsilon^2\nabla u\cdot\nabla v+\varepsilon^2\lambda\nabla u\cdot\nabla w+(uv+\lambda uw)]\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}[\varepsilon^2\nabla u\cdot\nabla v+uv]+\lambda\frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}[\varepsilon^2\nabla u\cdot\nabla w+uw]\\
&= \langle u,v\rangle_\varepsilon+\lambda\langle u,w\rangle_\varepsilon
\end{aligned}$$

Esto demuestra que (2.1) es una forma bilineal. Además, para cada $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\min\{\frac{1}{\varepsilon^{N-2}},\frac{1}{\varepsilon^N}\}\left\|u\right\|^2\le\left\|u\right\|_\varepsilon^2\le\max\{\frac{1}{\varepsilon^{N-2}},\frac{1}{\varepsilon^N}\}\left\|u\right\|^2. \tag{2.2}$$

Por lo tanto $\|u\|_\varepsilon=0$ si y sólo si $u=0$.

Esto demuestra que la función definida en (2.1) es un producto interno en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Más aún, las desigualdades (2.2) demuestran que la norma inducida $\|\cdot\|_\varepsilon$ es equivalente a lo norma usual de Sobolev $\|\cdot\|$.

Por otra parte, como

$$|u|_{\varepsilon,p}=\left(\frac{1}{\varepsilon^N}\right)^{\frac{1}{p}}|u|_p \qquad \text{para cada } u\in L^p(\mathbb{R}^N),$$

se tiene que $|\cdot|_{\varepsilon,p}$ es una norma en $L^p(\mathbb{R}^N)$ equivalente a la norma usual de Lebesgue $|\cdot|_p$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Como corolario del análisis hecho en la prueba de la Proposición 2.2 tenemos que $H^1(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert con producto interno definido en (2.1). El siguiente paso en nuestro estudio del problema $(\wp_\varepsilon)$ es usar la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ para estudiar el funcional de energía definido sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ asociado a esta ecuación.

El hecho de que $H^1(\mathbb{R}^N)$ sea un espacio de Hilbert con la nueva norma $\|\cdot\|_\varepsilon$, nos dará información sobre la regularidad de cierta función, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La función $F : H \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(u) := \frac{1}{2}\langle u, u \rangle$$

es de clase C^∞ en H y se tiene que, para cada $u, v, w \in H$,

$$F'(u)v = \langle u, v \rangle \qquad y \qquad F''(u)[v, w] = \langle v, w \rangle.$$

Demostración. Sean $u, v \in H$. Puesto que

$$\begin{aligned} \frac{F(u+v) - F(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} &= \frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v \rangle}{\|v\|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left[\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2\right] - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v \rangle}{\|v\|} \\ &= \frac{1}{2}\|v\| \end{aligned}$$

y que $\frac{1}{2}\|v\| \xrightarrow[v \to 0]{} 0$, se sigue que

$$\lim_{v \to 0} \frac{F(u+v) - F(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} = 0.$$

Esto demuestra que la función F es diferenciable en cada punto u de H y que

$$F'(u)v = \langle u, v \rangle \qquad \text{para cada } v \in H.$$

La función $F' : H \to \mathcal{B}(H, \mathbb{R})$, $F'(u) = \langle u, \cdot \rangle$ es lineal y continua. Consecuentemente es diferenciable en cada punto u de H y $F''(u) = F'$. De esta manera vemos que

$$F''(u)[v, w] = \langle v, w \rangle \qquad \text{para cada } v, w \in H.$$

Como F'' es constante, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y todas sus derivadas son cero.

□

Proposición 2.4. *La función $H : L^p(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H(u) := \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,,$$

es clase $\mathcal{C}^2$ y sus derivadas están dadas por

$$H'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}\, uv, \qquad H''(u)[v,w] = (p-1)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}\, vw,$$

para $u, v, w \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Puede hallarse en [10, Proposition 1.12] □

Consideremos el funcional

$$J_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$J_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|u|_{\varepsilon,p}^p.$$

Este funcional está bien definido pues $p \in (2, 2^*)$ y el Teorema 2.1 nos garantiza que el encaje $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ es continuo, respecto a las normas de Sobolev y de Lebesgue, en sus respectivos espacios.

Proposición 2.5. *El funcional J_ε es clase $\mathcal{C}^2(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

Demostración. Este hecho es una consecuencia de las dos proposiciones anteriores. Para verlo, escribamos

$$F_1(u) := \frac{1}{p}\,|u|_{\varepsilon,p}^p\,, \qquad \text{para } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Como

$$F_1(u) = \frac{1}{\varepsilon^N}\left(\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\right),$$

se sigue de Proposición 2.4 que F_1 es clase $\mathcal{C}^2$. Por otro lado, puesto que para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tenemos

$$\frac{1}{2}\,\|u\|_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle_\varepsilon,$$

se sigue de la Proposición 2.3 que el funcional definido en $H^1(\mathbb{R}^N)$ como $u \mapsto \frac{1}{2}\,\|u\|_\varepsilon^2$ es clase $\mathcal{C}^2$.

Bien, ya que $J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\,\|u\|_\varepsilon^2 - F_1(u)$, queda demostrado que este funcional es clase $\mathcal{C}^2$. Más aún, se tiene, para cada $u, v, w \in H^1(\mathbb{R})$,

$$J_\varepsilon'(u)(v) = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left[\varepsilon^2 \nabla u \cdot \nabla v + uv\right] - \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}\, uv$$

y

$$J_\varepsilon''(u)[v,w] = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left[\varepsilon^2 \nabla v \cdot \nabla w + vw\right] - \frac{(p-1)}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}\, wv.$$

□

Sea $H_0^1(\Omega)$ la cerradura en $H^1(\mathbb{R}^N)$, respecto a la norma usual de Sobolev, del espacio de funciones de clase C^∞ con soporte compacto en Ω.

Definición 2.6. *Una **solución (débil) de** $(\wp_\varepsilon)$ es un punto crítico del funcional*

$$J_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

2.2 El problema variacional con simetrías

En esta sección veremos como expresar en términos del lenguaje de la teoría de grupos el hecho de que una solución del problema $(\wp_\varepsilon)$ tenga cierta simetría. Veremos también que para estudiar este tipo de soluciones es posible restringir el análisis del funcional J_ε a un subespacio de $H_0^1(\Omega)$.

Definición 2.7. *Sean G un subgrupo de $O(N)$ y $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$ un homomorfismo de grupos.*

(a) Un subconjunto Z de $\mathbb{R}^N$ es G-invariante si $Gx \subset Z$ para cada $x \in Z$.

(b) Si $Z \subset \mathbb{R}^N$ es G-invariante, una función $f : Z \to \mathbb{R}$ es G-invariante si es constante en cada G-órbita de Z, es decir, si

$$f(gz) = f(z) \qquad \text{para cada } g \in G \text{ y cada } z \in Z.$$

A una función $O(N)$-invariante se le llama, simplemente, radial.

(c) Si $Z \subset \mathbb{R}^N$ es G-invariante, una función $f : Z \to \mathbb{R}$ es ϕ-equivariante, si

$$f(gz) = \phi(g)f(z) \qquad \text{para cada } g \in G \text{ y cada } z \in Z.$$

Proposición 2.8. *Sean G un subgrupo de $O(N)$ y Ω un dominio G-invariante.*

(a) Si $u \in L^p(\Omega)$ y $g \in G$, entonces $u \circ g \in L^p(\Omega)$ y $|u \circ g|_{\varepsilon,p} = |u|_{\varepsilon,p}$.

(b) Si $u \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in G$, entonces $u \circ g \in H_0^1(\Omega)$,

$$\nabla(u \circ g) = g^{-1} \circ \nabla u \circ g$$

y $\|u \circ g\|_\varepsilon = \|u\|_\varepsilon$.

Demostración. (a) Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $g \in G$. Puesto que Ω es G-invariante, vemos que $g(\Omega) = \Omega$. Además, como $|\det(g)| = 1$, usando el teorema de cambio de variable se tiene que

$$|u \circ g|_p^p = \int_\Omega |u(gx)|^p \ dx = \int_\Omega |u(y)|^p \ dy = |u|_p^p.$$

De esta manera, vemos que

$$|u \circ g|_{\epsilon,p} = \varepsilon^{-\frac{N}{p}} |u \circ g|_p = \varepsilon^{-\frac{N}{p}} |u|_p = |u|_{\epsilon,p}.$$

(b) Sean $g \in G$ y $x \in \Omega$. Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y tiene soporte compacto en Ω, la regla de la cadena asegura que, para cada $y \in \mathbb{R}^N$

$$\nabla(\varphi \circ g)(x) \cdot y = (\varphi \circ g)'(x)y = \varphi'(gx)[gy] = \nabla\varphi(gx) \cdot gy.$$

Puesto que g es una isometría,

$$\nabla\varphi(gx) \cdot gy = g^{-1}\nabla\varphi(gx) \cdot y.$$

Consecuentemente,

$$\nabla(\varphi \circ g) = g^{-1} \circ \nabla\varphi \circ g.$$

Si expresamos a g^{-1} en forma matricial como $g^{-1} = (a_{ij})$, la identidad anterior se escribe como

$$\frac{\partial(\varphi \circ g)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \circ g, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Ahora, si $u \in H_0^1(\Omega)$, elegimos una sucesión de funciones clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto en Ω, digamos $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ en $H_0^1(\Omega)$. En particular, tenemos que $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ y $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j} \xrightarrow[k\to\infty]{} D_j u$ en $L^2(\Omega)$. Así, de la parte (a) obtenemos que

$$\varphi_k \circ g \xrightarrow[k\to\infty]{} u \circ g \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j} \circ g \xrightarrow[k\to\infty]{} D_j u \circ g \qquad \text{en } L^2(\Omega)\ .$$

Más aún, gracias a esta última propiedad de convergencia en $L^2(\Omega)$ y a la identidad (2.3), tenemos que

$$\frac{\partial(\varphi_k \circ g)}{\partial x_i} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} D_j u \circ g \qquad \text{en } L^2(\Omega)\ .$$

En resumen, hemos visto que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones clase C^∞ con soporte compacto en Ω es tal que

$$\varphi_k \circ g \xrightarrow[k\to\infty]{} u \circ g \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial(\varphi_k \circ g)}{\partial x_i} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} D_j u \circ g \qquad \text{en } L^2(\Omega)\ .$$

El resultado [2, Lema 16.13] nos permite deducir que

$$u \circ g \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{y} \qquad D_i(u \circ g) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} D_j u \circ g \qquad \text{para cada } i = 1, \ldots, N.\ .$$

Así, en cada punto $x \in \Omega$ tendremos la identidad

$$\nabla(u \circ g) = g^{-1} \circ \nabla u \circ g,$$

que era la que había que demostrar.

Ahora, usando la identidad que acabamos de mostrar y que $g^{-1} \in O(N)$ vemos que, para cada $x \in \Omega$,

$$|\nabla(u \circ g)(x)|^2 = \left|(g^{-1} \circ \nabla u \circ g)(x)\right|^2 = \left|g^{-1}(\nabla u(gx))\right|^2 = |\nabla u(gx)|^2\,.$$

De manera equivalente, hemos mostrado que para cada $x \in \Omega$, se tiene la identidad

$$|\nabla(u \circ g)|^2 = |\nabla u \circ g|^2\,.$$

Finalmente, como $g(\Omega) = \Omega$ y $|\det(g)| = 1$, usando la identidad anterior y el teorema de cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned} \|u \circ g\|_\varepsilon^2 &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_\Omega \left[|\nabla(u \circ g)|^2 + \varepsilon^2 |u \circ g|^2\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_\Omega \left[|\nabla u \circ g|^2 + \varepsilon^2 |u \circ g|^2\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + \varepsilon^2 |u|^2\right] \\ &= \|u\|_\varepsilon^2\,. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Supongamos que G es un subgrupo de $O(N)$ y que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si Ω es G-invariante, para cada $g \in G$ y cada función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, denotamos por $gu : \Omega \to \mathbb{R}$ a la composición $gu := u \circ g^{-1}$, es decir,

$$(gu)(x) := u(g^{-1}x) \qquad \text{para cada } x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Puesto que cada $g \in G$ es una isometría lineal de $\mathbb{R}^N$, tenemos que para cualesquiera $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(u + v) = gu + gv \qquad \text{y} \qquad g(\lambda u) = \lambda(gu).$$

De estas observaciones y de la Proposición 2.8 se sigue el siguiente resultado.

Corolario 2.9. *Sean G un subgrupo de $O(N)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si Ω es un dominio G-invariante, para cada $g \in G$ las funciones*

$$g : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \qquad y \qquad g : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

dadas por $u \mapsto gu$ son isomorfismos lineales e isometrías.

Demostración. Las observaciones anteriores y la Proposición 2.8 nos garantizan que, para cada $g \in G$, las funciones

$$g : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \qquad \text{y} \qquad g : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

son ambas isometrías lineales. Sin embargo, no queda claro que sean isomorfismos. A continuación esclareceremos esto demostrando que, dado $g \in G$, la función inversa de $g : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ y la de $g : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ son

$$g^{-1} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \qquad \text{y} \qquad g^{-1} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

respectivamente.

Sean $g \in G$, $u \in H_0^1(\Omega)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}(gu) &= (gu) \circ (g^{-1})^{-1} = (gu) \circ g \\ &= (u \circ g^{-1}) \circ g = u \circ (g^{-1} \circ g) = u \end{aligned}$$

y que

$$g(g^{-1}u) = (g^{-1}u) \circ g^{-1} = (u \circ (g^{-1})^{-1}) \circ g^{-1}$$
$$= (u \circ g) \circ g^{-1} = u \circ (g \circ g^{-1}) = u.$$

Estos cálculos demuestran que, en efecto, $g^{-1} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ es la función inversa de $g : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ y, consecuentemente, que esta función es un isomorfismo isométrico. Puesto que $g : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ tiene la misma regla de correspondencia, se sigue que esta es igualmente un isomorfismo.

$\square$

2.2.1 El principio de criticalidad simétrica

Si H es un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathcal{B}(H, H)$ al conjunto de funciones lineales y continuas de H en si mismo y por

$$\mathcal{O}(H) := \{g \in \mathcal{B}(H, H) : g \text{ es biyectiva y para cada } u \in H,\ \|gu\|_H = \|u\|_H\}$$

al conjunto de isometrías lineales de H. El conjunto $\mathcal{O}(H)$ es un grupo bajo la composición de funciones.

Definición 2.10. *Sea G un grupo. Una acción (isométrica) de G en H es un homomorfismo de grupos $G \to \mathcal{O}(H)$. Un espacio de Hilbert con una acción de G se llama un G-espacio de Hilbert.*

La imagen de $g \in G$ bajo el homomorfismo $G \to \mathcal{O}(H)$ se denota por $g : H \to H$ y se escribe gu en lugar de $g(u)$ para denotar a la imagen de $u \in H$ bajo la isometría g.

Ejemplo 2.11. *Sean G un subgrupo de $O(N)$ y Ω un dominio G-invariante de $\mathbb{R}^N$. Entonces $H_0^1(\Omega)$ es un G-espacio de Hilbert con la acción*

$$G \to \mathcal{O}(H_0^1(\Omega))$$

que, a cada $g \in G$, le asocia la isometría lineal

$$g : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \qquad u \mapsto gu,$$

donde gu es la función definida en (2.4).

Demostración. La función $G \to \mathcal{O}(H_0^1(\Omega))$ es un homomorfimso de grupos pues, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ y cada $g, h \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}(gh)u &= u \circ (gh)^{-1} = u \circ (h^{-1}g^{-1}) \\ &= (u \circ h^{-1}) \circ g^{-1} = g(u \circ h^{-1}) = g(hu).\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.12. *Sean G un subgrupo de $O(N)$ y $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$ un homomorfismo de grupos. Si Ω es un dominio G-invariante de $\mathbb{R}^N$, definimos una acción de G en $H_0^1(\Omega)$ como sigue:*

$$G \to \mathcal{O}(H_0^1(\Omega)), \qquad g \mapsto g_\phi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega),$$

donde $g_\phi u := \phi(g)\ gu$, es decir, para $g \in G$ y $x \in \Omega$,

$$(g_\phi u)(x) := \phi(g)\ u(g^{-1}x).$$

Demostración. Por un cálculo análogo al de la prueba del Corolario 2.9, para cada $g \in G$, la función g_ϕ es un isomorfismo lineal, pero es también una isometría, ya que

$$\|g_\phi u\|_\varepsilon = |\phi(g)|\, \|gu\|_\varepsilon = \|gu\|_\varepsilon = \|u\|_\varepsilon .$$

Además,

$$|g_\phi u|_{\varepsilon,p} = |\phi(g)|\, |gu|_{\varepsilon,p} = |gu|_{\varepsilon,p} = |u|_{\varepsilon,p} .$$

Bien, ya vimos que la función $G \to \mathcal{O}(H_0^1(\Omega))$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos pues, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ y cada $g, h \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}(gh)_\phi u &= \phi(gh)\ (gh)u = \phi(g)\phi(h)\ g(hu) \\ &= \phi(g)\ g(\phi(h)\ hu) = g_\phi(h_\phi u).\end{aligned}$$

□

Definición 2.13. *Sea H un G-espacio de Hilbert. Un funcional $J : H \to \mathbb{R}$ se llama G-invariante si, para cada $g \in G$ y cada $u \in H$ se tiene*

$$J(gu) = J(u),$$

y una función $\chi : H \to H$ se llama G-equivariante si para cada $g \in G$ y cada $u \in H$ se tiene

$$\chi(gu) = g\chi(u).$$

El espacio de G-puntos fijos de H es el subespacio

$$H^G := \{ \ u \in H \ : \text{para cada } g \in G, \ gu = u \ \}.$$

Resulta que si H es un G-espacio de Hilbert, se tiene que H^G es un subespacio vectorial cerrado. Consecuentemente H^G es un espacio de Hilbert per se.

Ejemplo 2.14. *Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es G-invariante, entonces el funcional dado por $J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|u|_{\varepsilon,p}^p$ es G invariante para la acción de G definida en el Ejemplo 2.11. El espacio de G-puntos fijos de $H_0^1(\Omega)$ es*

$$H_0^1(\Omega)^G = \{ \ u \in H_0^1(\Omega) \ : u \text{ es } G\text{-invariante} \ \}.$$

Ejemplo 2.15. *Si G es un subgrupo de $O(N)$, $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$ un homomorfismo de grupos y Ω es G-invariante, entonces el funcional dado por $J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|u|_{\varepsilon,p}^p$ es G invariante para la acción de G definida en el Ejemplo 2.12. En este caso, denotaremos por*

$$H_0^1(\Omega)^\phi = \{u \in H_0^1(\Omega) : u(gx) = \phi(g)u(x) \text{ para cada } g \in G \text{ y cada } x \in \Omega \ \}$$

al espacio de puntos fijos de $H_0^1(\Omega)$ bajo esta acción. En términos de la notación introducida en esta sección, tenemos

$$H_0^1(\Omega)^\phi = \{ \ u \in H_0^1(\Omega) \ : u \text{ es } \phi\text{-equivariante} \ \}.$$

El siguiente resultado juega un papel muy importante en el estudio del problema variacional con simetrías, pues nos dice que basta que una función sea un punto crítico de la restricción del funcional de energía a cierto subespacio, para que ésta sea una solución débil del problema.

Teorema 2.16 (Principio de criticalidad simétrica, Palais, 1979**).** *Si H es un espacio de Hilbert equipado con una acción de un grupo G y $J : H \to \mathbb{R}$ es un funcional $G-$invariante de clase $\mathcal{C}^1$, entonces* *(a)* $\nabla J : H \to H$ *es* $G-$*equivariante, es decir,*

$$\nabla J(gu) = g\nabla J(u) \qquad \forall u \in H,\ \forall g \in G.$$

(b) Si $u \in H^G$ *es un punto crítico de la restricción* $J\restriction_{H^G}: H^G \longrightarrow \mathbb{R}$*, entonces,* u *es un punto crítico de* J*.*

Demostración. Puede hallarse en [10, Theorem 1.28]. □

2.2.2 Soluciones simétricas que cambian de signo

Sea Ω un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^N$. Nuestro propósito es estudiar ciertas soluciones que cambian de signo del problema $(\wp_\varepsilon)$. Para esto supongamos que G es un subgrupo de $O(N)$, que Ω es G-invariante y que $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$ es un homomorfismo de grupos. Así, lo que nosotros queremos es estudiar a las soluciones ϕ-equivariantes del problema $(\wp_\varepsilon)$. Entonces consideremos el siguiente problema

$$(\wp_\varepsilon^\phi) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u(gx) = \phi(g)u(x) & g \in G,\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Las soluciones ϕ-equivariantes del problema $(\wp_\varepsilon)$ son las soluciones del problema $\wp_\varepsilon^\phi$. Sin embargo, como ya mencionamos antes, para estudiar a este tipo de soluciones es suficiente estudiar los puntos críticos de la restricción del funcional J_ε a cierto subespacio. Para ver esto, consideramos la acción definida de en el Ejemplo 2.12 como

$$G \to \mathcal{O}(H_0^1(\Omega)), \qquad g \mapsto g_\phi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega).$$

Es importante notar que si ϕ es el homomorfismo trivial, es decir, si para cada $g \in G$, $\phi(g) = 1$, entonces esta acción coincide con la definida en el Ejemplo 2.11. Sin embargo, si ϕ es un homomorfismo suprayectivo, la acción es distinta de la siguiente manera: Supongamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es un punto fijo bajo de acción. Entonces, para cada $x \in \Omega$ y cada $g \in G$

$$u(gx) = \phi(g)u(x).$$

Así, si $\phi(g) = -1$, entonces $u(gx) = -u(x)$. Esto nos dice que si $u \neq 0$, entonces u cambia de signo y no es G-invariante.

Como el funcional $J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|u|_{\varepsilon,p}^p$ es G-invariante para esta acción y es de clase C^2, tenemos, como consecuencia del principio de criticalidad simétrica (Teorema 2.16), que si u es un punto crítico de la restricción

$$J_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)^\phi} : H_0^1(\Omega)^\phi \to \mathbb{R},$$

entonces u es un punto crítico de $J_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Esto demuestra que las soluciones ϕ-equivariantes del problema $(\wp_\varepsilon)$ son los puntos críticos de $J_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)^\phi}$. Podemos resumir este hecho en el siguiente resultado.

Corolario 2.17. *Si G es un subgrupo de $O(N)$, $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$ es un homomorfimso de grupos y Ω es un dominio suave G- invariante, las soluciones del problema*

$$(\wp_\varepsilon^\phi) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u(gx) = \phi(g)u(x) & g \in G,\ x \in \Omega, \end{cases}$$

son precisamente los puntos críticos de la restricción

$$J_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)^\phi} : H_0^1(\Omega)^\phi \to \mathbb{R}$$

del funcional J_ε al espacio $H_0^1(\Omega)^\phi$.

Capítulo 3

Soluciones nodales no radiales

En este capítulo demostraremos los teoremas principales de la tesis. Veremos que el problema $(\wp_\varepsilon)$ tiene soluciones ϕ-equivarientes no triviales, que por lo tanto cambiarán de signo y serán no radiales; además demostramos que el problema (0.1) tiene soluciones no triviales ϕ-equivarientes que ocurren que ocurren como perfil asintótico de soluciones ϕ-equivarientes del problema $(\wp_\varepsilon)$ y analizamos las propiedades simétricas de sus puntos de concentración. Los Teoremas 0.2 y 0.1 serán una consecuencia del resultado principal de este capítulo.

En adelante supondremos que G es un subgrupo cerrado de $O(N)$ que satisface

(G_1) $|G| = \infty$,

(G_2) Para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, o bien $G_\xi = G$, o bien $|G_\xi| = 1$,

(G_3) Existe un epimomorfismo continuo $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$.

3.1 El problema en el espacio euclidiano

Consideremos el problema

$$(\wp_\infty^\phi) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ u(gx) = \phi(g)u(x) \quad \forall g \in G,\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

con $p \in (2, 2^*)$.

Por el principio de criticalidad simétrica (Teorema 2.16), las soluciones del problema $(\wp_\infty^\phi)$ son los puntos críticos del funcional $J_\infty : H^1(\mathbb{R}^N)^\phi \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\infty(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p,$$

donde $\|\cdot\|$ y $|\cdot|_p$ denotan a las normas usuales de $H^1(\mathbb{R}^N)$ y $L^p(\mathbb{R}^N)$ respectivamente. Los puntos críticos no triviales de J_∞ pertenecen al conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty^\phi &:= \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi : u \neq 0,\ J_\infty'(u)u = 0\right\} \\ &= \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi : u \neq 0,\ \|u\|^2 = |u|_p^p\right\}.\end{aligned}$$

Definimos

$$c_\infty^\phi := \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty^\phi} J_\infty(u).$$

La siguiente proposición asegura, en particular, que $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi \neq \{0\}$.

Proposición 3.1. *Se cumple lo siguiente:*

(a) $\dim H^1(\mathbb{R}^N)^\phi = \infty$,

(b) $\mathcal{N}_\infty^\phi \neq \emptyset$,

(c) $0 < c_\infty^\phi < \infty$.

Demostración. (a) Por (G_1) y (G_2), existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $|G_{\xi_0}| = 1$. La función $\iota : G \to G\xi_0$ dada por $\iota(g) := g\xi_0$ es continua y biyectiva (por (G_2)) y, como G es compacto, ι es un homeomorfismo. Por tanto, la composición $\eta := \phi \circ \iota^{-1} : G\xi_0 \to \mathbb{Z}_2$ es continua. Denotamos por $G^+\xi_0 := \eta^{-1}(1)$ y $G^-\xi_0 := \eta^{-1}(-1)$. Estos conjuntos son ajenos y no vacíos (por (G_3)), y la distancia entre ellos es positiva. Elegimos $\varrho > 0$ tal que $2\varrho < \operatorname{dist}(G^+\xi_0, G^-\xi_0)$ y $\varrho < \operatorname{dist}(G\xi_0, (\mathbb{R}^N)^G)$, y definimos

$$\Omega^+ := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, G^+\xi_0) < \varrho\}, \quad \Omega^- := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, G^-\xi_0) < \varrho\}.$$

Estos conjuntos son abiertos y G-invariantes, y $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$. Sea $\gamma \in G$ tal que $\phi(\gamma) = -1$. Entonces $\Omega^+ = \gamma(\Omega^-)$ y, para cada $u \in H_0^1(\Omega^+)^G$, la función

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega^+, \\ -u(\gamma x) & \text{si } x \in \Omega^-, \end{cases}$$

pertenece a $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$. Por tanto, puesto que $\dim H_0^1(\Omega^+)^G = \infty$, concluimos que $\dim H^1(\mathbb{R}^N)^\phi = \infty$.

(b) Ya que $\dim H^1(\mathbb{R}^N)^\phi = \infty$, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$ tal que $u \neq 0$. La función

$$v := \frac{\|u\|^{\frac{2}{p-2}}}{|u|_p^{\frac{p}{p-2}}}\, u$$

pertenece a $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$, $v \neq 0$ y satisface que

$$\|v\|^2 = \frac{\|u\|^{\frac{4}{p-2}}}{|u|_p^{\frac{2p}{p-2}}}\ \|u\|^2 = \frac{\|u\|^{\frac{2p}{p-2}}}{|u|_p^{\frac{2p}{p-2}}} = \frac{\|u\|^{\frac{2p}{p-2}}}{|u|_p^{\frac{p^2}{p-2}}}\ |u|_p^p = |v|_p^p .$$

Consecuentemente, $v \in \mathcal{N}_\infty^\phi$.

(c) Como $\mathcal{N}_\infty^\phi \neq \emptyset$, se tiene que $c_\infty^\phi < \infty$. Por otra parte, el teorema de encaje de Sobolev (Teorema 2.1) asegura que

$$S_\infty^\phi := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} \geq \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} > 0.$$

Es sencillo comprobar que

$$c_\infty^\phi = \frac{p-2}{2p}(S_\infty^\phi)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Por tanto, $c_\infty^\phi > 0$. □

Proposición 3.2. *(a) $\mathcal{N}_\infty^\phi$ es un subconjunto cerrado de $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$.*

*(b) $\mathcal{N}_\infty^\phi$ es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$. Se llama la **variedad de Nehari**.*

(c) $\mathcal{N}_\infty^\phi$ es una restricción natural para J_∞, es decir, $u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$ es un punto crítico de J_∞ si y sólo si u es un punto crítico de la restricción $J_\infty|_{\mathcal{N}_\infty^\phi}$.

(d) Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi \setminus \{0\}$ existe un único $t_u \in (0,\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$. Más aún, t_u es el único punto en $(0,\infty)$ que satisface

$$\max_{t \geq 0} J_\infty(tu) = J_\infty(t_u u).$$

Demostración. (a) De acuerdo con el Teorema 2.1 existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C \ \|u\|, \qquad \text{para cada } u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi.$$

Por lo tanto, para cada $u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$,

$$C^{-p} \leq \frac{\|u\|^p}{|u|_p^p} = \|u\|^{p-2}.$$

Como consecuencia tenemos que

$$C^{\frac{-p}{p-2}} \leq \|u\|, \qquad \text{para cada } u \in \mathcal{N}_\infty^\phi,$$

donde la constante $C^{\frac{-p}{p-2}}$ es positiva. Por lo tanto,

$$\mathcal{N}_\infty^\phi = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi : \|u\| \geq C^{\frac{-p}{p-2}} \quad \text{y} \quad \|u\|^2 = |u|_p^p\},$$

donde vemos que es $\mathcal{N}_\infty^\phi$ es un subconjunto cerrado de $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$.

(b) Denotaremos al producto interno que induce la norma $\|\cdot\|$ usual de Sobolev en $H^1(\mathbb{R})^\phi$ como

$$\langle u, v\rangle_\infty := \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \cdot \nabla v + uv], \qquad \text{para cada } u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi.$$

Consideramos a la función $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N)^\phi \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $\Psi(u) = \|u\|^2 - |u|_p^p$. De esta manera, $\mathcal{N}_\infty^\phi = \Psi^{-1}(\{0\})$.

Como consecuencia de las Proposiciones 2.3 y 2.4 se tiene que Ψ es clase $\mathcal{C}^2$ y que su derivada es

$$\Psi'(u)v = 2\langle u, v\rangle_\infty - p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv, \qquad \text{para cada } u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi.$$

Luego, vemos que 0 que cero es un valor regular de Ψ, pues

$$\langle \nabla\Psi(u), u\rangle = \Psi'(u)u = 2\|u\|^2 - p\,|u|_p^p = (2-p)\|u\|^2 \neq 0 \qquad \text{para cada } u \in \mathcal{N}_\infty^\phi. \tag{3.1}$$

Esto demuestra que $\mathcal{N}_\infty^\phi$ es una variedad de clase $\mathcal{C}^2$ de $H^1(\mathbb{R})^\phi$.

(c) De la identidad (3.1) se sigue que, si $u \neq 0$, entonces $u \notin \ker \Psi'(u)$. En cuyo caso,

$$H^1(\mathbb{R}^N)^\phi = \ker \Psi'(u) \oplus \{tu : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora, si $u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$ es un punto crítico de la restricción $J_\infty \mid_{\mathcal{N}_\infty^\phi}$, entonces, por definición,

$$J'_\infty(u)v = 0 \qquad \text{para cada } v \in \ker \Psi'(u).$$

Además, por la definición de $\mathcal{N}_\infty^\phi$ se tiene que $J'_\infty(u)u = 0$. Por consiguiente,

$$J'_\infty(u)v = 0 \qquad \text{para cada } v \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi.$$

Es decir, siempre que $u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$ sea un punto crítico de la restricción $J_\infty \mid_{\mathcal{N}_\infty^\phi}$, entonces, será un punto crítico de J_∞ en $\mathcal{N}_\infty^\phi$, lo que demuestra la afirmación.

(d) : Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi \setminus \{0\}$. Consideremos a la función $f_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_u(t) := J_\infty(tu).$$

Notemos que, si $f'_u(t) = 0$, entonces $J_\infty(tu)u = 0$. Así, $J_\infty(tu)tu = 0$. Esto significa que $tu \in \mathcal{N}_\infty^\phi$. Recíprocamente, si $tu \in \mathcal{N}_\infty^\phi$, entonces $J_\infty(tu)tu = 0$ y, por lo tanto, $J_\infty(tu)u = 0$. Esto significa que $f'_u(t) = 0$. Esto demuestra que $tu \in \mathcal{N}_\infty^\phi$ si y sólo si t es un punto crítico de la función f_u.

Por otro lado, si $f'_u(t) = 0$, entonces $t^2 \|u\|^2 - |u|_p^p t^p = 0$. Por lo tanto,

$$t = \frac{\|u\|^{\frac{2}{p-2}}}{|u|_p^{\frac{p}{p-2}}}.$$

Esto demuestra que la función f_u tiene un único punto crítico en el intervalo $(0,\infty)$. Denotemos por t_u a este punto crítico. Más aún, como $f''_u(t_u) = (2-p)\|u\|^2 < 0$, vemos que, t_u es un máximo de f_u en $(0,\infty)$.

En total, t_u es el único punto en $(0,\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$ y

$$\max_{t\geq 0} J_\infty(tu) = J_\infty(t_u u).$$

□

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 3.3. *Si existe $u \in \mathcal{N}_\infty^\phi$ tal que $J_\infty(u) = c_\infty^\phi$, entonces u es solución no trivial del problema $(\wp_\infty^\phi)$. Esta solución cambia de signo y no es radial.*

Demostración. Si $J_\infty(u) = c_\infty^\phi$ entonces, por definición, u es un mínimo de J_∞ en $\mathcal{N}_\infty^\phi$.

Consecuentemente, u es un punto crítico de la restricción $J_\infty\mid_{\mathcal{N}_\infty^\phi}$. De la Proposición 3.2 se sigue que u es un punto crítico de J_∞ en $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$.

Por el principio de criticalidad simétrica (Teorema 2.16) se sigue que u es una solución del problema $(\wp_\infty^\phi)$. Además, u es una solución no trivial ya que $u \neq 0$. Luego, por (G_3) existe $\gamma \in G$ tal que $\phi(\gamma) = -1$. De esta manera, $u(gx) = -u(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Esto demuestra que u es no radial y que cambia de signo. □

Una solución de $(\wp_\infty^\phi)$ que satisface $J_\infty(u) = c_\infty^\phi$ se llama una **solución ϕ-equivariante de energía mínima**. Nuestro objetivo es demostrar que tal solución existe. Obtendremos este resultado a través del análisis del comportamiento asintótico de las soluciones minimizantes de un problema singularmente perturbado que estudiaremos a continuación.

3.2 El problema de Dirichlet singularmente perturbado

Sean Ω un dominio suave, acotado y G-invariante de $\mathbb{R}^N$ y $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo es investigar la existencia de soluciones de energía mínima del problema

$$(\wp_\varepsilon^\phi) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u(gx) = \phi(g)u(x) & \forall g \in G,\ \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

con $p \in (2, 2^*)$ y analizar su comportamiento cuando $\varepsilon \to 0$.

Como antes, denotamos por

$$\|u\|_\varepsilon := \left(\frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\varepsilon^2|\nabla u|^2 + u^2\right]\right)^{1/2}, \qquad |u|_{\varepsilon,p} := \left(\frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\right)^{1/p}.$$

Como vimos en el Capítulo II, las soluciones de $(\wp_\varepsilon)$ son los puntos críticos del funcional $J_\varepsilon : H_0^1(\Omega)^\phi \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|u|_{\varepsilon,p}^p.$$

Los puntos críticos no triviales de J_ε pertenecen a

$$\mathcal{N}_\varepsilon^\phi := \left\{u \in H_0^1(\Omega)^\phi : u \neq 0,\ \|u\|_\varepsilon^2 = |u|_{\varepsilon,p}^p\right\}.$$

Definimos

$$c_\varepsilon^\phi := \inf_{u\in\mathcal{N}_\varepsilon^\phi} J_\varepsilon(u).$$

Proposición 3.4. *Se cumple lo siguiente:*

(*a*) $\dim H_0^1(\Omega)^\phi = \infty$,

(*b*) $\mathcal{N}_\varepsilon^\phi \neq \emptyset$,

(*c*) $0 < c_\varepsilon^\phi < \infty$.

Demostración. (*a*) El espacio $V := (\mathbb{R}^N)^G$ de G-puntos fijos de $\mathbb{R}^N$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$ distinto de $\mathbb{R}^N$ (por (G_3)). Como Ω es abierto en $\mathbb{R}^N$, existe $x_0 \in \Omega \smallsetminus V$. De esta manera $|G_{x_0}| = 1$ y, por consiguiente, la función $\iota : G \to Gx_0$ dada por $\iota(g) := gx_0$ es continua y biyectiva (por (G_2)) y, como G es compacto, ι es un homeomorfismo. Por tanto, la composición $\eta := \phi \circ \iota^{-1} : Gx_0 \to \mathbb{Z}_2$ es continua. Denotamos por $G^+x_0 := \eta^{-1}(1)$ y $G^-x_0 := \eta^{-1}(-1)$. Estos dos subconjuntos de Ω son ajenos y no vacíos (por (G_3)), y la distancia entre ellos es positiva. Elegimos $\varrho > 0$ tal que $2\varrho < \operatorname{dist}(G^+x_0, G^-x_0)$ y $\varrho < \operatorname{dist}(Gx_0, \partial\Omega)$, y definimos

$$\Omega^+ := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, G^+x_0) < \varrho\}, \quad \Omega^- := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, G^-x_0) < \varrho\}.$$

Estos dos subconjuntos de Ω son abiertos y G-invariantes, y $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$. Sea $\gamma \in G$ tal que $\phi(\gamma) = -1$. Entonces $\Omega^+ = \gamma(\Omega^-)$ y, de nuevo, para cada $u \in H_0^1(\Omega^+)^G$, la función

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega^+, \\ -u(\gamma x) & \text{si } x \in \Omega^-, \end{cases}$$

pertenece a $H_0^1(\Omega)^\phi$. Por tanto, puesto que $\dim H_0^1(\Omega^+)^G = \infty$, concluimos que $\dim H_0^1(\Omega)^\phi = \infty$.

(*b*) Ya que $H_0^1(\Omega)^\phi = \infty$, hay un $u \in H_0^1(\Omega)^\phi$ tal que $u \neq 0$. La función

$$v := \frac{\|u\|_\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}}{|u|_{\varepsilon,p}^{\frac{p}{p-2}}}\, u$$

pertenece a $H_0^1(\Omega)^\phi$, $v \neq 0$ y satisface que

$$\|v\|_\varepsilon^2 = \frac{\|u\|_\varepsilon^{\frac{4}{p-2}}}{|u|_{\varepsilon,p}^{\frac{2p}{p-2}}}\, \|u\|_\varepsilon^2 = \frac{\|u\|_\varepsilon^{\frac{2p}{p-2}}}{|u|_{\varepsilon,p}^{\frac{2p}{p-2}}} = \frac{\|u\|_\varepsilon^{\frac{2p}{p-2}}}{|u|_{\varepsilon,p}^{\frac{p^2}{p-2}}}\, |u|_{\varepsilon,p}^p = |v|_{\varepsilon,p}^p\,.$$

Consecuentemente, $v \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$.

(c) Como $\mathcal{N}_\varepsilon^\phi \neq \emptyset$, se tiene que $c_\varepsilon^\phi < \infty$. Por otra parte, como las normas $\|\cdot\|_\varepsilon$ y $|\cdot|_{\epsilon,p}$ son equivalentes, respectivamente, a la norma usual de Sobolev $\|\cdot\|$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y a la norma de Lebesgue $|\cdot|_p$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, el teorema de encaje de Sobolev (Teorema 2.1) asegura que

$$S_\varepsilon^\phi := \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)^\phi \\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_\varepsilon^2}{|u|_{\varepsilon,p}^2} \geq \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_\varepsilon^2}{|u|_{\varepsilon,p}^2} > 0.$$

Por otro lado, es sencillo comprobar que

$$c_\varepsilon^\phi = \frac{p-2}{2p}(S_\varepsilon^\phi)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Por tanto, $c_\varepsilon^\phi > 0$. □

Proposición 3.5. *(a) $\mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ es un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)^\phi$.*

(b) $\mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de $H_0^1(\Omega)^\phi$.

(c) $\mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ es una restricción natural para J_ε, es decir, $u \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ es un punto crítico de J_ε si y sólo si u es un punto crítico de la restricción $J_\varepsilon |_{\mathcal{N}_\varepsilon^\phi}$.

(d) Para cada $u \in H_0^1(\Omega)^\phi \smallsetminus \{0\}$ existe un único $t_u \in (0,\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$. Más aún, t_u es el único punto en $(0,\infty)$ para el que cumple que

$$\max_{t\geq 0} J_\varepsilon(tu) = J_\varepsilon(t_u u).$$

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la de la Proposición 3.2. □

De la proposición anterior se infiere el siguiente resultado.

Corolario 3.6. *Si $u \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ satisface $J_\varepsilon(u) = c_\varepsilon^\phi$, entonces u es una solución no trivial de $(\wp_\varepsilon^\phi)$ que no es radial y cambia de signo.*

Para probar la existencia de soluciones minimizantes usaremos los siguientes resultados.

Teorema 3.7 (Rellich-Kondrashov)**.** *Si Ω es un dominio acotado y $p \in [1, 2^*)$, entonces la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es un operador compacto, es decir, toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. La prueba puede ser consultada en [2, Teorema 17.12] □

Lema 3.8. *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ y $p \in [2, 2^*]$ tales que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$ y que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a v en $L^p(\Omega)$. Entonces $u = v$.*

Demostración. Como Ω es acotado y $p \in [2, 2^*]$, el encaje $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continuo. Así, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a v in $L^2(\Omega)$. En particular, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a v en $L^2(\Omega)$.

Por otro lado, el teorema del encaje de Sobolev (Teorema 2.1) asegura que el encaje $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continuo. Como $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ son ambos espacios de Hilbert y el encaje es lineal y continuo, se sigue que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a u en $L^2(\Omega)$.

De la unicidad del límite débil en $L^2(\Omega)$ concluimos que $u = v$, que es lo que se quería demostrar.

$\square$

Teorema 3.9 (Existencia de mínimos)**.** *Existe $u \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ tal que $J_\varepsilon(u) = c_\varepsilon^\phi$.*

Demostración. Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ tal que $J_\varepsilon(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} c_\varepsilon^\phi$. Como $u_k \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$, se tiene que

$$J_\varepsilon(u_k) = \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\varepsilon^2 = \frac{p-2}{2p} |u_k|_{\varepsilon,p}^p .$$

Esto nos dice que la sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)^\phi$. Consecuentemente, ésta tiene una subsucesión débilmente convergente en $H_0^1(\Omega)^\phi$. Por simplicidad denotaremos del mismo modo a tal subsucesión. Sea $u \in H_0^1(\Omega)^\phi$ el límite débil de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ahora, como $p < 2^*$, aplicando el Teorema 3.7 y el Lema 3.8, podemos elegir una subsucesión de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a u en $L^p(\Omega)$. Por lo tanto,

$$|u|_{\varepsilon,p}^p = \lim_{k\to\infty} |u_k|_{\varepsilon,p}^p = \frac{2p}{p-2} c_\varepsilon^\phi > 0.$$

Esto nos dice que $u \neq 0$.

Sabemos que el número $t_u = \left(\frac{|u|_{\varepsilon,p}^p}{\|u\|_\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2-p}}$ es tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$. Además, como $u_k \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$, se tiene que $J_\varepsilon(t_u u_k) \le J_\varepsilon(u_k)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^\phi \le J_\varepsilon(t_u u) &= \frac{1}{2}\|t_u u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_{\varepsilon,p}^p \\ &\le \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|t_u u_k\|_\varepsilon^2\right) - \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p}|t_u u_k|_{\varepsilon,p}^p\right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k) \le \liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon(u_k) = c_\varepsilon^\phi. \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k) = \frac{1}{2}\|t_u u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_{\varepsilon,p}^p .$$

Por otro lado, como $J_\varepsilon(t_u u_k) \le J_\varepsilon(u_k)$, vemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k) \le \limsup_{k\to\infty} J_\varepsilon(u_k) &= c_\varepsilon^\phi \\ &= \frac{1}{2}\|t_u u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_{\varepsilon,p}^p . \end{aligned}$$

De esta estimación se sigue que

$$\limsup_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k) \le \liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k).$$

Como consecuencia tenemos que $\lim_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k)$ existe y que

$$\lim_{k\to\infty} J_\varepsilon(t_u u_k) = \frac{1}{2}\|t_u u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_{\varepsilon,p}^p .$$

Sin embargo, como $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $L^p(\Omega)$, concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_\varepsilon^2 = \|u\|_\varepsilon^2 .$$

Por lo tanto, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Consecuentemente, $u \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ y $J_\varepsilon(u) = c_\varepsilon^\phi$. Esto concluye la demostración. □

3.3 Comportamiento asintótico de las soluciones minimizantes

Nuestro objetivo es describir el comportamiento asintótico de las soluciones de energía mínima del problema $(\wp_\varepsilon^\phi)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Para ello requerimos los resultados enunciados a continuación.

La siguiente proposición describe el comportamiento asintótico de c_ε^ϕ cuando Ω tiene un G-punto fijo.

Proposición 3.10. *Si existe $x_0 \in \Omega$ tal que $Gx_0 = \{x_0\}$, entonces*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon^\phi = c_\infty^\phi.$$

Demostración. Probaremos primero que

$$c_\infty^\phi \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon^\phi. \tag{3.2}$$

El Teorema 3.9 asegura que existe $u_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon^\phi$ tal que $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = c_\varepsilon^\phi$. Identificamos a u_ε con su extensión trivial a $\mathbb{R}^N$ y definimos $v_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ como $v_\varepsilon(z) := u_\varepsilon(\varepsilon z)$. Es sencillo comprobar que

$$\|v_\varepsilon\| = \|u_\varepsilon\|_\varepsilon \qquad \text{y} \qquad |v_\varepsilon|_p = |u_\varepsilon|_{\varepsilon,p}.$$

Por tanto, $v_\varepsilon \in \mathcal{N}_\infty$ y

$$c_\infty^\phi \leq \tfrac{p-2}{2p}\|v_\varepsilon\|^2 = \tfrac{p-2}{2p}\|u_\varepsilon\|_\varepsilon^2 = c_\varepsilon^\phi.$$

Esto demuestra (3.2).

Ahora demostraremos que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon^\phi \leq c_\infty^\phi. \tag{3.3}$$

Sea $w \in \mathcal{N}_\infty^\phi$. Fijemos $r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$. Sea $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función radial tal que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{r}{2}$ y $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq r$. Definamos $w_\varepsilon(x) := w(\frac{x-x_0}{\varepsilon})\chi(x - x_0)$. Claramente, para cada $\gamma \in G_{x_0}$ se tiene $w_\varepsilon(\gamma x) = \phi(\gamma) w_\varepsilon(x)$. Más aún, como $Gx_0 = \{x_0\}$, tenemos que w_ε es ϕ-equivariante.

Veremos que, dada $w \in \mathcal{N}_\infty^\phi$, las funciones w_ε definidas en el párrafo anterior tienen la siguiente propiedad:

$$\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2 \to \|w\|^2 \quad \text{y} \quad |w_\varepsilon|_{\varepsilon,p}^p \to |w|_p^p \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0. \tag{3.4}$$

Para ver esto, notemos que

$$\begin{aligned}\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2 =& \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^2\sum_{i=1}^N\left[D_iw\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\frac{\chi(x-x_0)}{\varepsilon}+w\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(x-x_0)\right]^2dx\\ &+\frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left[w\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\chi(x-x_0)\right]^2dx.\end{aligned}$$

Ahora, aplicando el cambio de variable $y=\frac{x-x_0}{\varepsilon}$ y reacomodando los términos queda

$$\begin{aligned}\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^2\sum_{i=1}^N\left[D_iw\left(y\right)\frac{\chi(y\varepsilon)}{\varepsilon}+w\left(y\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(\varepsilon y)\right]^2dy+\int_{\mathbb{R}^N}\left[w\left(y\right)\chi(\varepsilon y)\right]^2dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\left[D_iw\left(y\right)\chi(y\varepsilon)+\varepsilon w\left(y\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(\varepsilon y)\right]^2dy+\int_{\mathbb{R}^N}\left[w\left(y\right)\chi(\varepsilon y)\right]^2dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla w(y)\right|^2+w^2(y)\right]\chi^2(y\varepsilon)\ dy+\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^N}w^2(y)\ \left|\nabla\chi(\varepsilon y)\right|^2\ dy\\ &\quad+2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\left(D_iw\left(y\right)w\left(y\right)\right)\left(\chi(y\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(\varepsilon y)\right)\ dy.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left|\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2-\|w\|\right| \leq& \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla w(y)\right|^2+w^2(y)\right]\chi^2(y\varepsilon)dy-\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla w\right|^2+w^2\right)\right|\\ &+2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\left|D_iw\left(y\right)w\left(y\right)\right|\ \left|\chi(y\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(\varepsilon y)\right|dy \qquad (3.5)\\ &+\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^N}w^2(y)\ \left|\nabla\chi(\varepsilon y)\right|^2dy.\end{aligned}$$

Primero, el teorema de convergencia monótona de Lebesgue nos asegura que

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla w(y)\right|^2+w^2(y)\right]\chi^2(y\varepsilon)\ dy-\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla w(y)\right|^2+w^2(y)\right]\ dy\right|=0, \qquad (3.6)$$

Luego, usando que χ tiene soporte compacto vemos que

$$\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^N}w^2(y)\ \left|\nabla\chi(\varepsilon y)\right|^2\ dy\leq\varepsilon^2\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi(x)\right|\ \left\|w\right\|^2.$$

Esta estimación implica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2(y)\ \ |\nabla\chi(\varepsilon y)|^2\ \ dy = 0. \tag{3.7}$$

Además, escribiendo $C := \max_{1\le i\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\chi(x)\right|$, tenemos la estimación

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} |D_i w\,(y)\, w\,(y)| \left|\chi(y\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(\varepsilon y)\right| dy &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\chi(x)|\, C \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} |D_i w\,(y)\, w\,(y)|\, dy \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\chi(x)|\, C \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\chi(x)|\, CN\, \|u\|^2 .
\end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} |D_i w\,(y)\, w\,(y)| \left|\chi(y\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}(\varepsilon y)\right| dy = 0. \tag{3.8}$$

Finalmente, tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$ en (3.5) y aplicando (3.6), (3.7) y (3.8) queda demostrado que $\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \|w\|^2$.

Por otro lado, aplicando de nuevo el cambio de variable $y = \frac{x-x_0}{\varepsilon}$ tenemos

$$|w_\varepsilon|_{\varepsilon,p}^p = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| w\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \chi(x-x_0)\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w\,(y)\,\chi(\varepsilon y)|^p\, dy.$$

Sin embargo, en este caso el teorema de convergencia monótona de Lebesgue nos asegura directamente que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |w\,(y)\,\chi(\varepsilon y)|^p\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} |w\,(y)|^p\, dy.$$

Como consecuencia directa se tiene que $|w_\varepsilon|_{\varepsilon,p}^p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |w|_p^p$, lo que termina la demostración de (3.4).

Ahora bien, aplicando (3.4), vemos que, cuando $\varepsilon \to 0$,

$$\max_{t>0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon) = \frac{p-2}{2p}\left(\frac{\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2}{|w_\varepsilon|_{\varepsilon,p}^2}\right)^{\frac{p}{p-2}} \longrightarrow \frac{p-2}{2p}\left(\frac{\|w\|^2}{|w|_p^2}\right)^{\frac{p}{p-2}} = J_\infty(w).$$

Así,

$$c_\varepsilon^\phi \leq \max_{t>0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon).$$

Ahora, calculando el límite superior obtenemos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon^\phi \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\max_{t>0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon)\right) = J_\infty(w).$$

Ya que está estimación es válida para cualquier $w \in \mathcal{N}_\infty^\phi$, (3.3) queda demostrada.

Finalmente, (3.2) y (3.3) implican que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon^\phi = c_\infty^\phi,$$

que es lo que se quería demostrar. □

Teorema 3.11 (Principio de continuación única)**.** *Sean Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $V \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Si $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ satisface*

$$-\Delta u + V(x)u = 0,$$

y $u = 0$ en un subconjunto abierto no vacío de Ω, entonces $u = 0$ en Ω.

Demostración. La prueba puede ser consultada en [5]. □

Lema 3.12 (Lema de Lions)**.** *Sea $r > 0$ y $2 \leq q < 2^*$. Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y si*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_k|^q \to 0 \quad \textit{cuando } k \to \infty,$$

entonces $u_k \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demostración. La prueba puede ser consultada en [10, Lemma 1.21]. □

Lema 3.13. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que $\omega_n \rightharpoonup \omega$ débilmente en H. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} (\|\omega_n\|^2 - \|\omega_n - \omega\|^2) = \|\omega\|^2.$$

Demostración. Puesto que $\omega_n \rightharpoonup \omega$ débilmente en H, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (\|\omega_n\|^2 - \|\omega_n - \omega\|^2) = \lim_{n\to\infty} (2\langle\omega_n, \omega\rangle - \|\omega\|^2) = 2\|\omega\|^2 - \|\omega\|^2 = \|\omega\|^2.$$

□

Lema 3.14 (Lema de Brezis-Lieb). *Sean* $p \in [1, \infty)$ *y* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\omega_n(x) \to \omega(x)$ *para casi todo* $x \in \mathbb{R}^N$*. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \left(|\omega_n|_p^p - |\omega_n - \omega|_p^p\right) = |\omega|_p^p\,.$$

Demostración. La prueba puede ser consultada en [10, Lemma 1.32]. □

Teorema 3.15. *Supongamos que existe* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $Gx_0 = \{x_0\}$*. Sean* $\varepsilon_k > 0$ *y* $u_k \in \mathcal{N}^\phi_{\varepsilon_k}$ *tales que* $\varepsilon_k \to 0$ *y* $J_{\varepsilon_k}(u_k) = c^\phi_{\varepsilon_k}$*. Entonces existen una sucesión* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *en* Ω *y una solución* $\widehat{u}$ *del problema* $(\wp^\phi_\infty)$ *tales que, pasando a una subsucesión,*

(i) $G\xi_k = \{\xi_k\}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, \partial\Omega) = \infty$.

(iii) $J_\infty(\widehat{u}) = c^\phi_\infty$.

(iv) $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| u_k - \widehat{u}\,\left(\varepsilon_k^{-1}(\,\cdot\, - \,\xi_k)\right)\right\|_{\varepsilon_k} = 0$.

(v) $\lim\limits_{k\to\infty} c^\phi_{\varepsilon_k} = c^\phi_\infty$.

Demostración. Identificamos a u_k con su extensión trivial a $\mathbb{R}^N$ y definimos $\widetilde{u}_k(z) := u_k(\varepsilon_k z)$. Entonces $\widetilde{u}_k \in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$ y

$$\|\widetilde{u}_k\|^2 = \|u_k\|^2_{\varepsilon_k} = \tfrac{2p}{p-2} c^\phi_{\varepsilon_k} = |u_k|^p_{\varepsilon_k,p} = |\widetilde{u}_k|^p_p \qquad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

En vista de que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $Gx_0 = \{x_0\}$, las Proposiciones 3.10 y 3.1 aseguran que $c^\phi_{\varepsilon_k} \to c^\phi_\infty > 0$. Del Lema 3.12 se sigue entonces que

$$\delta := \limsup_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\widetilde{u}_k|^p > 0.$$

Ahora bien, podemos escoger $y_k \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_k)} |\widetilde{u}_k|^p > \tfrac{\delta}{2}. \tag{3.9}$$

Para la sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ elegimos $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como en el Lema 1.5. Fijemos un $C > 0$ tal que, pasando a una subsucesión, $\mathrm{dist}(\zeta_k, Gy_k) < C$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Con esto obtenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ hay un $\gamma_k \in G$ tal que $B_1(\gamma_k y_k) \subset B_{C+1}(\zeta_k)$.

Usando que $\tilde{u}_k$ es ϕ-equivariante obtenemos la estimación

$$\int_{B_{C+1}(\zeta_k)} |\widetilde{u}_k|^p \geq \int_{B_1(\gamma_k y_k)} |\widetilde{u}_k|^p = \int_{B_1(y_k)} |\widetilde{u}_k|^p > \frac{\delta}{2}. \tag{3.10}$$

Veremos que la sucesión $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisface la propiedad (i) del Lema 1.5 como consecuencia de la estimación (3.10). Para ver esto procederemos por reducción al absurdo.

En busca de una contradicción supongamos que $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisface (ii) del Lema 1.5. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por (G_1), existen m elementos distintos $g_1, \dots, g_m \in G$. La afirmación (ii) asegura que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_i\zeta_k - g_j\zeta_k| \geq 2(C+1) \qquad \forall k \geq k_0 \quad \text{y} \quad \forall i \neq j.$$

Entonces $B_{C+1}(g_i\zeta_k) \cap B_{C+1}(g_j\zeta_k) = \emptyset$ para todo $i \neq j$ y $k \geq k_0$. Así que, como $\widetilde{u}_k$ es ϕ-equivariante,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}_k|^p \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{B_{C+1}(g_i\zeta_k)} |\widetilde{u}_k|^p = m \int_{B_{C+1}(\zeta_k)} |\widetilde{u}_k|^p > m\frac{\delta}{2}.$$

Esto es una contradicción, ya que $(\widetilde{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y m es arbitrario. Consecuentemente, ζ_k debe ser un G-punto fijo para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ahora definamos $\widehat{u}_k(x) := \widetilde{u}_k(x + \zeta_k)$. Como ζ_k es un G-punto fijo, la función $\widehat{u}_k$ es ϕ-equivariante, y como

$$\|\widehat{u}_k\|^2 = \|\widetilde{u}_k\|^2 = \tfrac{2p}{p-2} c^{\phi}_{\varepsilon_k} = |\widetilde{u}_k|_p^p = |\widehat{u}_k|_p^p \qquad \text{para cada } k \in \mathbb{N},$$

se tiene que $\widehat{u}_k \in \mathcal{N}^{\phi}_{\infty}$ y $J_\infty(\widehat{u}_k) \to c^{\phi}_{\infty}$. Puesto que la sucesión $(\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$, pasando a una subsucesión, $\widehat{u}_k \rightharpoonup \widehat{u}$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$, $\widehat{u}_k \to \widehat{u}$ fuertemente en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $\widehat{u}_k(x) \to \widehat{u}(x)$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^N$. De la desigualdad (3.10) se sigue que

$$\int_{B_{C+1}(0)} |\widehat{u}_k|^p = \int_{B_{C+1}(\zeta_k)} |\widetilde{u}_k|^p \geq \tfrac{\delta}{2}.$$

En consecuencia, $\widehat{u} \neq 0$. Ahora veremos que $\widehat{u}$ es solución del problema $(\wp^{\phi}_{\infty})$.

Como en la demostración de la Proposición 3.1, definimos

$$S_\infty^\phi := \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N)^\phi\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2}.$$

Aplicando los Lemas 3.13 y 3.14 obtenemos

$$\begin{aligned}
(S_p^\phi)^{\frac{p}{p-2}} &= \lim_{k\to\infty} \|\widehat{u}_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{u}_k - \widehat{u}\|^2 + \|\widehat{u}\|^2 \\
&\geq S_p^\phi(\lim_{k\to\infty} |\widehat{u}_k - \widehat{u}|_p^2 + |\widehat{u}|_p^2) \\
&\geq S_p^\phi(\lim_{k\to\infty} (|\widehat{u}_k - \widehat{u}|_p^p)^{\frac{2}{p}} + (|\widehat{u}|_p^p)^{\frac{2}{p}}) \\
&\geq S_p^\phi(\lim_{k\to\infty} |\widehat{u}_k - \widehat{u}|_p^p + |\widehat{u}|_p^p)^{\frac{2}{p}} \\
&= S_p^\phi(\lim_{k\to\infty} |\widehat{u}_k|_p^p)^{\frac{2}{p}} = (S_p^\phi)^{\frac{p}{p-2}}.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} (|\widehat{u}_k - \widehat{u}|_p^p)^{\frac{2}{p}} + (|\widehat{u}|_p^p)^{\frac{2}{p}} = (\lim_{k\to\infty} |\widehat{u}_k - \widehat{u}|_p^p + |\widehat{u}|_p^p)^{\frac{2}{p}}.$$

Luego, como $\widehat{u} \neq 0$, debemos tener

$$\lim_{k\to\infty} |\widehat{u}_k - \widehat{u}|_p^p = 0.$$

Consecuentemente,

$$(S_p^\phi)^{\frac{p}{p-2}} = (S_p^\phi)\, |\widehat{u}|_p^2 \leq \|\widehat{u}\|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|\widehat{u}_k\|^2 = (S_p^\phi)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Esto prueba que $\|\widehat{u}_k\|$ converge a $\|\widehat{u}\|$ cuando $k\to\infty$ y, por consiguiente, que $\widehat{u}_k$ converge a $\widehat{u}$ en $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi$. Como consecuencia, $\widehat{u}$ es una solución del problema $(\wp_\infty^\phi)$ y $J_\infty(\widehat{u}) = c_\infty^\phi$.

Ahora definamos $\xi_k = \varepsilon_k\zeta_k$. Puesto que G actúa por isometrías lineales en $\mathbb{R}^N$ y para cada $k\in\mathbb{N}$, $G_{\zeta_k} = \{\zeta_k\}$, entonces también se tiene que, para cada $k\in\mathbb{N}$, $G_{\xi_k} = \{\xi_k\}$.

En seguida mostraremos que la sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene la siguiente propiedad de convergencia: $\operatorname{dist}(\xi_k, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Para verlo recordemos que la sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es tal que

$$\int_{B_1(y_k)} |\widetilde{u}_k|^p > \frac{\delta}{2}.$$

Esto nos dice que $\operatorname{dist}(y_k, \operatorname{supp}(\tilde{u}_k)) < 1$. Por otro lado, $\operatorname{supp}(\tilde{u}_k) = \frac{1}{\varepsilon_k}\operatorname{supp}(u_k) \subset \frac{1}{\varepsilon_k}\overline{\Omega}$. De aquí que $\operatorname{dist}(y_k, \frac{1}{\varepsilon_k}\overline{\Omega}) \leq \operatorname{dist}(y_k, \operatorname{supp}(\tilde{u}_k)) < 1$. Finalmente, $\operatorname{dist}(\xi_k, \overline{\Omega}) = \varepsilon_k \operatorname{dist}(\zeta_k, \frac{1}{\varepsilon_k}\overline{\Omega}) \leq \varepsilon_k(|\zeta_k - y_k| + \operatorname{dist}(y_k, \frac{1}{\varepsilon_k}\overline{\Omega})) \leq \varepsilon_k(C+1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Por lo tanto, queda demostrado que $\operatorname{dist}(\xi_k, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

En vista de la última propiedad que demostramos, podemos notar que, pasando a una subsucesión, $\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi \in \overline{\Omega}$. Luego, tenemos que $\varepsilon_k^{-1}\operatorname{dist}(\xi_k \partial\Omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} d \in [0,\infty]$. Veremos que, necesariamente, $d = \infty$. Para esto procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que

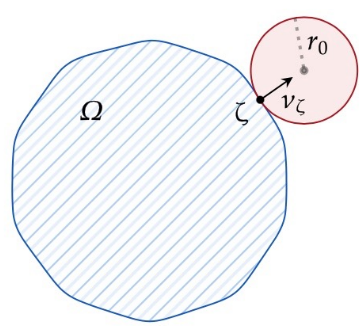
$$d_k := \varepsilon_k^{-1}\operatorname{dist}(\xi_k, \partial\Omega) \to d \in [0,\infty).$$

Entonces $\xi_k \to \xi \in \partial\Omega$, así que, para k suficientemente grande, existe un único $\theta_k \in \partial\Omega$ tal que $|\theta_k - \xi_k| = \operatorname{dist}(\xi_k, \partial\Omega)$.

Elegimos $r_0 > 0$ tal que

$$B_{r_0}(\zeta + r_0\nu_\zeta) \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \qquad \text{para cada } \zeta \in \partial\Omega,$$

donde ν_ζ es el normal unitaria exterior a Ω en ζ. Esta elección es ilustrada en el siguiente diagrama.



Sea $T_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la transformación dada por $T_k(x) := \frac{x-\xi_k}{\varepsilon_k}$, y sea $\eta_k := T_k(\theta_k)$. Entonces $|\eta_k| := d_k$. Así que, pasando a una subsucesión, tenemos que $\eta_k \to \eta$. Observemos que

$$T_k\left[B_{r_0}(\theta_k + r_0\nu_{\theta_k})\right] = B_{r_0\varepsilon_k^{-1}}(\eta_k + r_0\varepsilon_k^{-1}\nu_{\theta_k}).$$

Consideramos tres casos.

(1) Supongamos que $d > 0$ y que, para alguna subsucesión, $\xi_k \notin \Omega$. Es sencillo comprobar que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{d/2}(0) \subset B_{r_0\varepsilon_k^{-1}}(\eta_k + r_0\varepsilon_k^{-1}\nu_{\theta_k}) \qquad \text{para cada } k \geq k_0,$$

ya que los puntos η_k están muy cerca de la esfera con centro en 0 y radio d, el centro de $B_{r_0\varepsilon_k^{-1}}(\eta_k + r_0\varepsilon_k^{-1}\nu_{\theta_k})$ está sobre el rayo que sale de η_k y pasa por 0, y el radio de esta bola tiende a infinito (vea la Figura 3.1). Por tanto,

$$\varepsilon_k z + \xi_k = T_k^{-1}(z) \in B_{r_0}(\theta_k + r_0\nu_{\theta_k}) \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \qquad \text{para cada } z \in B_{d/2}(0).$$

En consecuencia, $\widehat{u}_k(z) = u_k(\varepsilon_k z + \xi_k) = 0$ para toda $z \in B_{d/2}(0)$ y, como $\widehat{u}_k(z) \to \widehat{u}(z)$ p.c.t. $z \in \mathbb{R}^N$, concluimos que $\widehat{u} \equiv 0$ en $B_{d/2}(0)$, lo que contradice el Teorema 3.11.

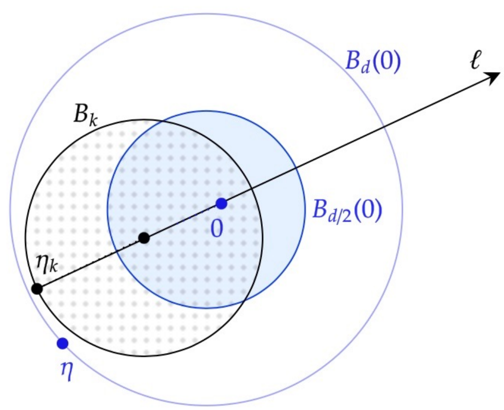


Figura 3.1: Caso (1): $B_k = T_k\left[B_{r_0}(\theta_k + r_0\nu_{\theta_k})\right]$

(2) Supongamos que $d > 0$ y que, para alguna subsucesión, $\xi_k \in \Omega$. Como $\eta_k \to \eta$, es sencillo comprobar[1] que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{d/2}(2\eta) \subset B_{r_0\varepsilon_k^{-1}}(\eta_k + r_0\varepsilon_k^{-1}\nu_{\theta_k}) \qquad \text{para cada } k \geq k_0.$$

[1] Vea la Figura 3.2.

Argumentando como en (1) llegamos a una contradicción.

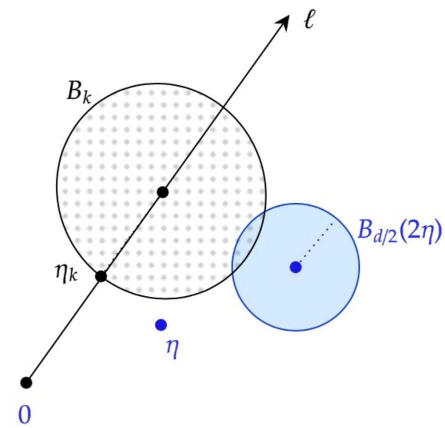


Figura 3.2: Caso (2): $B_k := T_k\left[B_{r_0}(\theta_k + r_0\nu_{\theta_k})\right]$

(3) Finalmente, si $d = 0$, como $\nu_{\theta_k} \to \nu_\xi$ concluimos[2] que

$$B_{1/2}(\nu_\xi) \subset B_{r_0\varepsilon_k^{-1}}(\eta_k + r_0\varepsilon_k^{-1}\nu_{\theta_k}) \qquad \text{para cada } k \geq k_0.$$

Argumentando como en (1) llegamos a una contradicción.

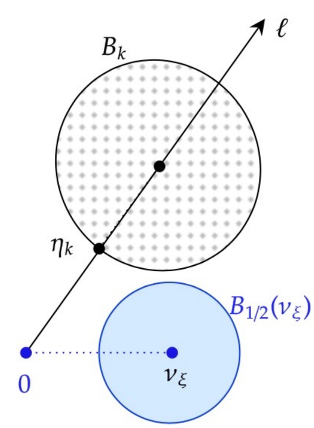


Figura 3.3: Caso (3): $B_k := T_k\left[B_{r_0}(\theta_k + r_0\nu_{\theta_k})\right]$

Esto demuestra que $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, \partial\Omega) = \infty$, lo que concluye la demostración del resultado. $\square$

[2]Vea la Figura 3.3.

3.4 Existencia de soluciones enteras nodales no radiales

El siguiente teorema es consecuencia de los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

Teorema 3.16. *Sea G es un subgrupo cerrado de $O(N)$ que satisface (G_1), (G_2) y (G_3), y sea $\mathbb{B}^N$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$.*

(a) *Para cada $\varepsilon > 0$ el problema*

$$(\wp_\varepsilon^\phi) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = |u|^{p-2}u & \text{en } \mathbb{B}^N, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{B}^N, \\ u(gx) = \phi(g)u(x) & \forall g \in G,\ \forall x \in \mathbb{B}^N, \end{cases}$$

tiene una solución no trivial de energía mínima, la cual cambia de signo y no es radial.

(b) *Si $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, y u_{ε_k} es una solución de energía mínima de $(\wp_{\varepsilon_k}^\phi)$, entonces existen una sucesión (ξ_k) en Ω y una solución no trivial $\widehat{u}$ del problema*

$$(\wp_\infty^\phi) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ u(gx) = \phi(g)u(x) \quad \forall g \in G,\ \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

tales que, pasando a una subsucesión,

(i) $G\xi_k = \{\xi_k\}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1} \operatorname{dist}(\xi_k, \partial\Omega) = \infty$.

(iii) $J_\infty(\widehat{u}) = c_\infty^\phi$.

(iv) $\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \widehat{u}\,(\varepsilon_k^{-1}(\cdot\, - \xi_k)) \right\|_{\varepsilon_k} = 0$.

(v) $\lim_{k\to\infty} c_{\varepsilon_k}^\phi = c_\infty^\phi$.

En consecuencia, el problema $(\wp_\infty^\phi)$ tiene una solución no trivial de energía mínima, la cual cambia de signo y no es radial.

Demostración. Observemos que $\mathbb{B}^N$ es G-invariante para cualquier subgrupo G de $O(N)$. La afirmación (a) es un caso particular del Teorema 3.9.

Como 0 es un G-punto fijo de $\mathbb{B}^N$ para cualquier subgrupo G de $O(N)$, la afirmación (b) es un caso particular del Teorema 3.15. $\square$

Demostración de los Teoremas 0.1 y 0.2. El Ejemplo 1.4 asegura que, si $N \geq 4$, existen subgrupos cerrados G de $O(N)$ que satisfacen (G_1), (G_2) y (G_3). Por tanto, los Teoremas 0.1 y 0.2 son consecuencia del Teorema 3.16. $\square$

Bibliografía

[1] Bartsch, Thomas; Willem, Michel: Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation. J. Funct. Anal. 117 (1993), no. 2, 447–460.

[2] Clapp, Mónica: Análisis Matemático. Segunda Edición. Colección Papirhos, Serie Textos, Núm. 2, Instituto de Matemáticas de la UNAM, México, 2017.

[3] Clapp, Mónica; Srikanth, P.N.: Entire nodal solutions of a semilinear elliptic equation and their effect on concentration phenomena. Journal of Mathematical Analysis and Applications 437 (2016), 485-497.

[4] Esteban, María Jesús; Lions, Pierre-Louis : Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 93 (1–2) (1982/83) 1–14.

[5] Garofalo, Nicola; Lin, Fang-Hua: Monotonicity properties of variational integrals, A_p weights and unique continuation. Indiana Univ. Math. J. 35 (1986), no. 2, 245–268.

[6] Lorca, Sebastián; Ubilla, Pedro: Symmetric and nonsymmetric solutions for an elliptic equation on $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal. 58 (2004), no. 7-8, 961–968.

[7] Ni, Wei-Ming: Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states. Notices Amer. Math. Soc. 45(1) (1998) 9–18.

[8] Ni, Wei-Ming; Wei, Juncheng: On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems, Comm. Pure Appl. Math. 48(7) (1995) 731–768.

[9] Palais, Richard S.: The principle of symmetric criticality. Comm. Math. Phys. 69 (1979), no. 1, 19–30.

[10] Willem, Michel: Minimax theorems, Progress in Nonlineal Differantial Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.