Anillos de Fracciones

(In a nutshell)

Álgebra Moderna II, Agosto 2020


YOU CAN PRESENT THE MATERIAL, BUT YOU CAN'T MAKE ME CARE.

La regla de 3

- El anillo $\mathbb{Z}$ no él mismo un campo, pero existe un campo [*natural*] donde está contenido, a saber, $\mathbb{Q}$.

La regla de 3

- El anillo $\mathbb{Z}$ no él mismo un campo, pero existe un campo [*natural*] donde está contenido, a saber, $\mathbb{Q}$.
- Cada racional de la forma $X = \frac{n}{m}$, con $m \neq 0$. Este racional representa al conjunto de soluciones $X \in \mathbb{Q}$ para la ecuación

$$Xm = n \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

La regla de 3

- El anillo $\mathbb{Z}$ no él mismo un campo, pero existe un campo [*natural*] donde está contenido, a saber, $\mathbb{Q}$.
- Cada racional de la forma $X = \frac{n}{m}$, con $m \neq 0$. Este racional representa al conjunto de soluciones $X \in \mathbb{Q}$ para la ecuación

$$Xm = n \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

- Esto sugiere que $\mathbb{Q}$ puede ser obtenido [*formalmente*] como conjuntos de soluciones a este tipo de ecuaciones.

- $\mathbb{Q}$ es el campo "más pequeño"que contiene a $\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Q}$ es el campo "más pequeño" que contiene a $\mathbb{Z}$.

En el siguiente sentido:

Si $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ es un morfismo de anillo inyectivo y K es un campo ocurre lo siguiente

- $\mathbb{Q}$ es el campo "más pequeño" que contiene a $\mathbb{Z}$.

En el siguiente sentido:

Si $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ es un morfismo de anillo inyectivo y K es un campo ocurre lo siguiente

- Si $n \neq 0$, entonces $\varphi(n)$ es invertible.

- $\mathbb{Q}$ es el campo "más pequeño" que contiene a $\mathbb{Z}$.

En el siguiente sentido:

Si $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ es un morfismo de anillo inyectivo y K es un campo ocurre lo siguiente

- Si $n \neq 0$, entonces $\varphi(n)$ es invertible.
- Además, $\varphi(n) = \varphi(n1) = \varphi(n)\varphi(1)$.

- $\mathbb{Q}$ es el campo "más pequeño" que contiene a $\mathbb{Z}$.

En el siguiente sentido:

Si $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ es un morfismo de anillo inyectivo y K es un campo ocurre lo siguiente

- Si $n \neq 0$, entonces $\varphi(n)$ es invertible.
- Además, $\varphi(n) = \varphi(n1) = \varphi(n)\varphi(1)$.
- La conclusión es que $\varphi(1) = 1_K$

- $\mathbb{Q}$ es el campo "más pequeño" que contiene a $\mathbb{Z}$.

En el siguiente sentido:

Si $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ es un morfismo de anillo inyectivo y K es un campo ocurre lo siguiente

- Si $n \neq 0$, entonces $\varphi(n)$ es invertible.
- Además, $\varphi(n) = \varphi(n1) = \varphi(n)\varphi(1)$.
- La conclusión es que $\varphi(1) = 1_K$

Luego, vemos que hay una extensión natural de φ a $\mathbb{Q}$, a la que llamaremos $\overline{\varphi}$:

$$\overline{\varphi}(\frac{n}{m}) = \varphi(n)[\varphi(m)]^{-1}.$$

Resulta que $\overline{\varphi}$ es un morfismo de campos inyectivo que se restringe a φ sobre $\mathbb{Z}$.

En otras palabras, si K tiene un subanillo que es esencialmente igual a $\mathbb{Z}$, ese subanillo estará contenido en un subcampo esencialmente igual a $\mathbb{Q}$.

En otras palabras, si K tiene un subanillo que es esencialmente igual a $\mathbb{Z}$, ese subanillo estará contenido en un subcampo esencialmente igual a $\mathbb{Q}$.

Ejemplo.

$R =$ anillo de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la suma y el producto definidos puntualmente. Definimos, para cada $n \in \mathbb{Z}$ a la función f_n que es la función constante n. Claramente $f_n + f_m = f_{n+m}$ y $f_n f_m = f_{nm}$.
Hay un subanillo de R que es isomorfo a $\mathbb{Q}$ que contiene a todas las funciones f_n.

Localización: Dominios enteros

Sea R un dominio entero [nuestros nuevos enteros].

Localización: Dominios enteros

Sea R un dominio entero [nuestros nuevos enteros].

Definición.

Un subconjunto S de $D \setminus \{0\}$ es multiplicativo si

1. para cada $a, b \in S$, $ab \in S$,
2. $1_D \in S$.

Localización: Dominios enteros

Sea R un dominio entero [nuestros nuevos enteros].

Definición.

Un subconjunto S de $D \setminus \{0\}$ es multiplicativo si

1. para cada $a, b \in S$, $ab \in S$,
2. $1_D \in S$.

A partir de ahora, supondremos un conjunto multiplicativo.
Consideraremos la relación $\sim \subset (D \times S) \times (D \times S)$ dada por
$(d_1, s_1) \sim (d_2, s_2)$ si y sólo si $d_1 s_2 = d_2 s_1$

Proposición.

Esta relación es de equivalencia

Proposición.

Esta relación es de equivalencia

Demostración.

Recordemos que, para la transitivadas usamos que D era un dominio entero $\square$

Proposición.

Esta relación es de equivalencia

Demostración.

Recordemos que, para la transitivadas usamos que D era un dominio entero $\square$

Definición.

Entonces, $S^{-1}D := (D \times S)/\sim$.

Para $d \in D$ y $s \in S$ $\frac{d}{s} := [(d,s)]_{\sim}$

Definición.

$$
\begin{aligned}
+ :& S^{-1}D \times S^{-1}D \longrightarrow S^{-1}D & \qquad \frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} &:= \frac{d_1 s_2 + d_2 s_1}{s_1 s_2} \\
\cdot :& S^{-1}D \times S^{-1}D \longrightarrow S^{-1}D & \qquad \frac{d_1}{s_1} \cdot \frac{d_2}{s_2} &:= \frac{d_1 d_2}{s_1 s_2}
\end{aligned}
$$

Definición.

$$+ :S^{-1}D \times S^{-1}D \longrightarrow S^{-1}D \qquad \frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} := \frac{d_1 s_2 + d_2 s_1}{s_1 s_2}$$
$$\cdot :S^{-1}D \times S^{-1}D \longrightarrow S^{-1}D \qquad \frac{d_1}{s_1} \cdot \frac{d_2}{s_2} := \frac{d_1 d_2}{s_1 s_2}$$

Cuiado!

No sabemos [a priori] que estas reglas de correspondencia definan funciones de facto. Cuando decimos que .^{es}tán bien definidas nos referimos a que son funciones de facto. Por ejemplo, hay que ver que si $\frac{d_1}{s_1} = \frac{\delta_1}{\sigma_1}$ y $\frac{d_2}{s_2} = \frac{\delta_2}{\sigma_2}$, Entonces,

$$\frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} = \frac{\delta_1}{\sigma_1} + \frac{\delta_2}{\sigma_2}$$

es decir,

$$\frac{d_1 s_2 + d_2 s_1}{s_1 s_2} = \frac{\delta_1 \sigma_2 + \delta_2 \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Teorema 1

1. *$S^{-1}D$ es un dominio entero.*

Teorema 1

1. *$S^{-1}D$ es un dominio entero.*
2. *La función $\iota : D \longrightarrow S^{-1}D$ dada por $\iota(d) = \frac{d}{1_D}$ es un homomorfimso inyetivo de anillos que manda el uno de D en el uno de $S^{-1}D$.*

Teorema 1

1. $S^{-1}D$ *es un dominio entero.*
2. *La función* $\iota : D \longrightarrow S^{-1}D$ *dada por* $\iota(d) = \frac{d}{1_D}$ *es un homomorfimso inyetivo de anillos que manda el uno de* D *en el uno de* $S^{-1}D$.
3. *Para cada* $s \in S$, $\iota(s) \cdot \frac{1}{s} = 1 = \frac{1}{s} \cdot \iota(s)$

Teorema 1

1. *$S^{-1}D$ es un dominio entero.*
2. *La función $\iota : D \longrightarrow S^{-1}D$ dada por $\iota(d) = \frac{d}{1_D}$ es un homomorfimso inyetivo de anillos que manda el uno de D en el uno de $S^{-1}D$.*
3. *Para cada $s \in S$, $\iota(s) \cdot \frac{1}{s} = 1 = \frac{1}{s} \cdot \iota(s)$*
4. *Si A es un anillo conmutativo unitario y si $\varphi : D \longrightarrow A$ es un homomorfismo de anillos conmutativos unitarios tal que $\varphi(1_D) = 1_A$ y que que $\varphi(S) \subset \mathcal{U}(A)$, entonces existe exactamente un morfismo de anillos $\overline{\varphi} : S^{-1}D \longrightarrow A$ tal que el diagrama conmuta*

Teorema 1

1. *$S^{-1}D$ es un dominio entero.*
2. *La función $\iota : D \longrightarrow S^{-1}D$ dada por $\iota(d) = \frac{d}{1_D}$ es un homomorfimso inyetivo de anillos que manda el uno de D en el uno de $S^{-1}D$.*
3. *Para cada $s \in S$, $\iota(s) \cdot \frac{1}{s} = 1 = \frac{1}{s} \cdot \iota(s)$*
4. *Si A es un anillo conmutativo unitario y si $\varphi : D \longrightarrow A$ es un homomorfismo de anillos conmutativos unitarios tal que $\varphi(1_D) = 1_A$ y que que $\varphi(S) \subset \mathcal{U}(A)$, entonces existe exactamente un morfismo de anillos $\overline{\varphi} : S^{-1}D \longrightarrow A$ tal que el diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & A \\
S^{-1}D \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición.

Si D es un dominio entero, $|D| \geq 1$ y $S = D \setminus \{0\}$, el anillo $S^{-1}D$ recube el nombre de campo de cocientes (o de fracciones) de D. Se suele denotar por $Q(D)$

Definición.

Si D es un dominio entero, $|D| \geq 1$ y $S = D \setminus \{0\}$, el anillo $S^{-1}D$ recube el nombre de campo de cocientes (o de fracciones) de D. Se suele denotar por $Q(D)$

Ejemplo.

$D = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$. Entonces

$$S^{-1}D = \{\frac{a}{b} \;:\; a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ impar}\}$$

Definición.

Si D es un dominio entero, $|D| \geq 1$ y $S = D \setminus \{0\}$, el anillo $S^{-1}D$ recube el nombre de campo de cocientes (o de fracciones) de D. Se suele denotar por $Q(D)$

Ejemplo.

$D = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$. Entonces

$$S^{-1}D = \{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ impar}\}$$

Ejemplo.

$D = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ con p primo. Entonces

$$S^{-1}D = \{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ p \text{ no divide a } b\}$$

Demostración del Teorema 1

Parte (1): Veamos que es dominio entero.

Supongamos que $\frac{d_1}{s_1}, \frac{d_2}{s_2} \in S^{-1}D$ son tales que $\frac{d_1}{s_1} \cdot \frac{d_2}{s_2} = \frac{0}{1_D}$. Entonces $(d_1 d_2)1_D = (0)(s_1 s_2)$. Como D mismo es dominio entero, tenemos que $d_1 = 0$ o $d_2 = 0$. Por lo tanto $\frac{d_1}{s_1} = \frac{0}{1_D}$ o $\frac{d_2}{s_2} = \frac{0}{1_D}$.

¿lo demás? Ejercicio para ustedes.

Parte (2): Que $\iota(1_D) = \frac{1_D}{1_D} = 1$ es obvio. Luego

$$\iota(a+b) = \frac{a+b}{1_D} = \frac{a1_D + b1_D}{1_D 1_D} = \frac{a}{1_D} + \frac{b}{1_D} = \iota(a) + \iota(b),$$

$$\iota(ab) = \frac{ab}{1_D} = \frac{ab}{1_D 1_D} = \frac{a}{1_D} \cdot \frac{b}{1_D} = \iota(a) \cdot \iota(b).$$

Finalmente, si $\iota(a) = \frac{0}{1_D}$, tendríamos que $\frac{0}{1_D} = \frac{a}{1_D}$. Entonces $01_D = a1_D$. Así $a = 0$ y ι es inyectiva.

Parte (3): Sea $s \in S$. Entonces,

$$\iota(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1_D} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s1_D}{1_D s} = \frac{1_D}{1_D} = 1.$$

Parte (4): Supongamos un morfismo de anillo unitarios $\varphi : D \longrightarrow A$ tal que $\varphi(1_D) = 1_A$. Para proponer hay $\overline{\varphi}$ hay un candidato obvio ¿quíen es?

$$\overline{\varphi}\left(\frac{d}{s}\right) = \varphi(d)[\varphi(s)]^{-1}$$

P.D: $\overline{\varphi}$ está bien definida, es morfismo y hace conmutar al diagrama.

$\overline{\varphi}$ está bien definida: [es decir, es una función de facto] Sean $\frac{d}{s}, \frac{\tilde{d}}{\tilde{s}} \in S^{-1}D$ tales que $\frac{d}{s} = \frac{\tilde{d}}{\tilde{s}}$ [por lo tanto $d\tilde{s} = \tilde{d}s$]. Luego $\varphi(d\tilde{s}) = \varphi(\tilde{d}s)$, usamos que es morfismo y obtenemos

$$\varphi(d)\varphi(\tilde{s}) = \varphi(\tilde{d})\varphi(s).$$

Usamos que $\varphi(\tilde{s}), \varphi(s) \in \mathcal{U}(A)$ y por lo tanto, multiplicando por lo inversos en la ecuación anterior conseguimos

$$\varphi(d)[\varphi(s)]^{-1} = \varphi(\tilde{d})[\varphi(\tilde{s})]^{-1}.$$

Esto nos dice que

$$\overline{\varphi}\left(\frac{d}{s}\right) = \overline{\varphi}\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{s}}\right).$$

$\overline{\varphi}$ es morfimos de anillos:

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}\left(\frac{d_1}{s_1}+\frac{d_2}{s_2}\right) &= \overline{\varphi}\left(\frac{d_1 s_2 + d_2 s_1}{s_1 s_2}\right) = \varphi(d_1 s_2 + d_2 s_1)[\varphi(s_1 s_2)]^{-1} \\
&= [\varphi(d_1)\varphi(s_2) + \varphi(d_2)\varphi(s_1)]\,[\varphi(s_1)\varphi(s_2)]^{-1} \\
&= [\varphi(d_1)\varphi(s_2) + \varphi(d_2)\varphi(s_1)]\,[\varphi(s_1)]^{-1}[\varphi(s_2)]^{-1} \\
&= \varphi(d_1)[\varphi(s_1)]^{-1} + \varphi(d_2)[\varphi(s_2)]^{-1} \\
&= \overline{\varphi}\left(\frac{d_1}{s_1}\right) + \overline{\varphi}\left(\frac{d_2}{s_2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}\left(\frac{d_1}{s_1}\cdot\frac{d_2}{s_2}\right) &= \overline{\varphi}\left(\frac{d_1 d_2}{s_1 s_2}\right) = \varphi(d_1 s d_2)[\varphi(s_1 s_2)]^{-1} \\
&= \left[\varphi(d_1)[\varphi(s_1)]^{-1}\right]\left[\varphi(d_2)[\varphi(s_2)]^{-1}\right]
\end{aligned}
$$

$\overline{\varphi}$ hace conmutar al diagrama: **¿Qué diagrama?**

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & A \\ S^{-1}D \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

P.D: $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$ Sea $d \in D$. Entonces

$$\overline{\varphi} \circ \iota(d) = \overline{\varphi}\left(\frac{d}{1_D}\right) = \varphi(d)[\varphi(1_D)]^{-1} = \varphi(d)[1_A]^{-1} = \varphi(d).$$

Observaciones:

- Si $S = R \setminus \{0\}$, a propiedad **4** del Teorema 1 sobre $\iota : D \longrightarrow S^{-1}D$ se suele expresar diciendo que ι es *universal* entre todos los morfismo de $D \longrightarrow K$ a un campo.
- Uno suele ïdentificarçada elemento de D con su imagen bajo ι. Así, en lugar de escribir $\frac{d}{1_d}$ simplemente escribimos d, como elemento de $S^{-1}D$.
- Esto nos dice que un dominio entero D siempre es subanillo de un campo $Q(D)$.

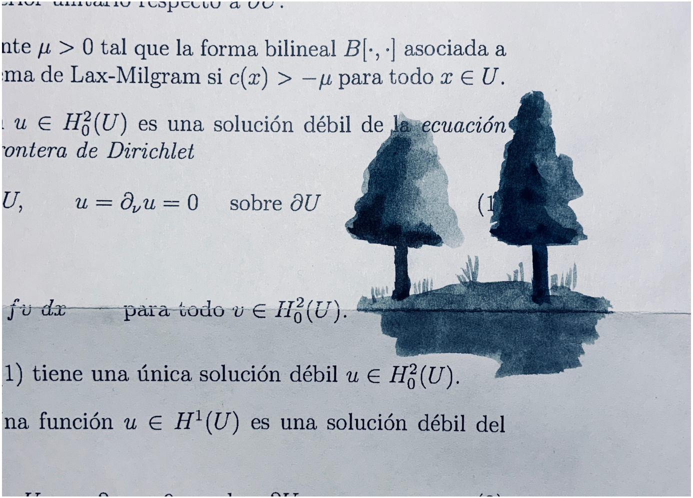
Ejemplos:

- $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.
- Ya sabemos que $\mathbb{Z}[i]$ es dominio entero. Ocurre que $Q(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i]$
- el campo de cocientes de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Ejercicios.

1. Si K es un campo, muestre que $Q(K)$ es isomorfo a K.
2. Muestre que si D y $\tilde{D}$ son isomorfos entonces, $Q(D)$ y son $Q(\tilde{D})$ son isomorfos.
3. Cualquier morfismo inyectivo $D \longrightarrow \tilde{D}$ se extiende a un correspondiente morfismo inyectivo $Q(D) \longrightarrow Q(\tilde{D})$.

Fin



nte $\mu > 0$ tal que la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ asociada a
ma de Lax-Milgram si $c(x) > -\mu$ para todo $x \in U$.
$u \in H_0^2(U)$ es una solución débil de la ecuación
ontera de Dirichlet
U, $u = \partial_\nu u = 0$ sobre ∂U
$fv\,dx$ para todo $v \in H_0^2(U)$.
1) tiene una única solución débil $u \in H_0^2(U)$.
na función $u \in H^1(U)$ es una solución débil del

Gracias