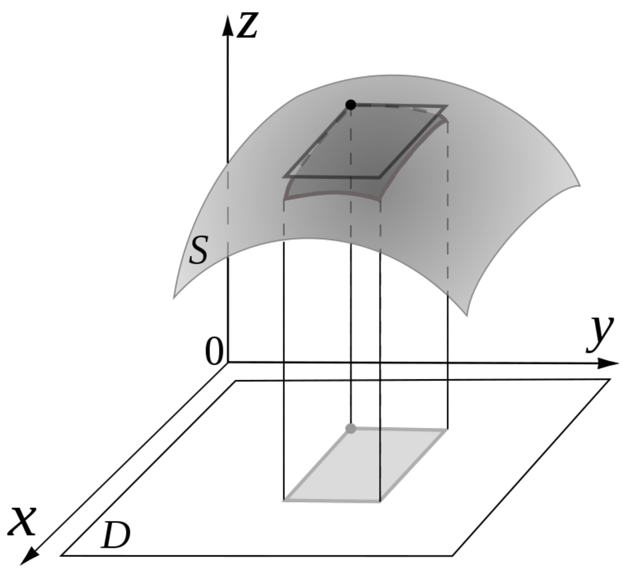
Ecuaciones Diferenciales Parciales

Integrales

2023-1



Objetivos:

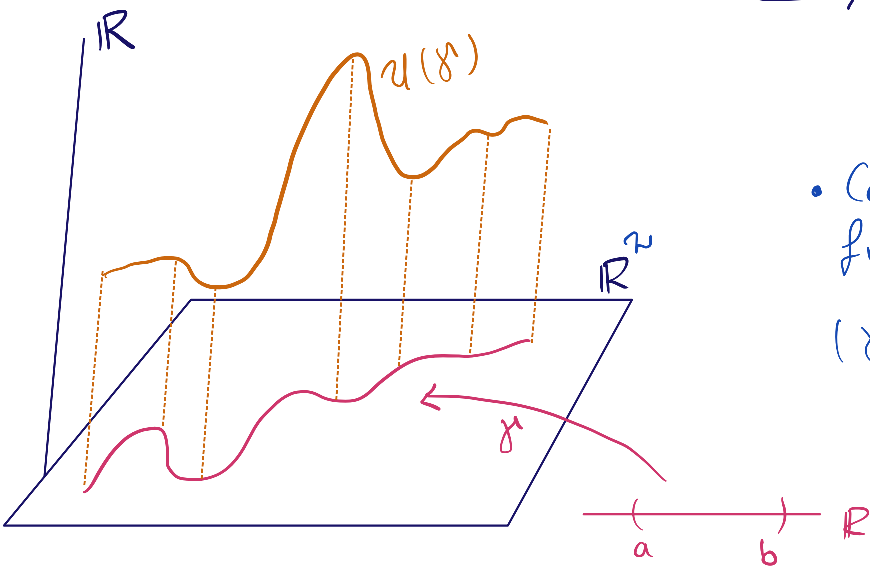
- Revisar la noción de integral sobre una hipersuperficie en $\mathbb{R}^N$
- Ver los teoremas que la conectan con la integral usual en $\mathbb{R}^N$
- Ver ejemplos

Integral sobre una curva

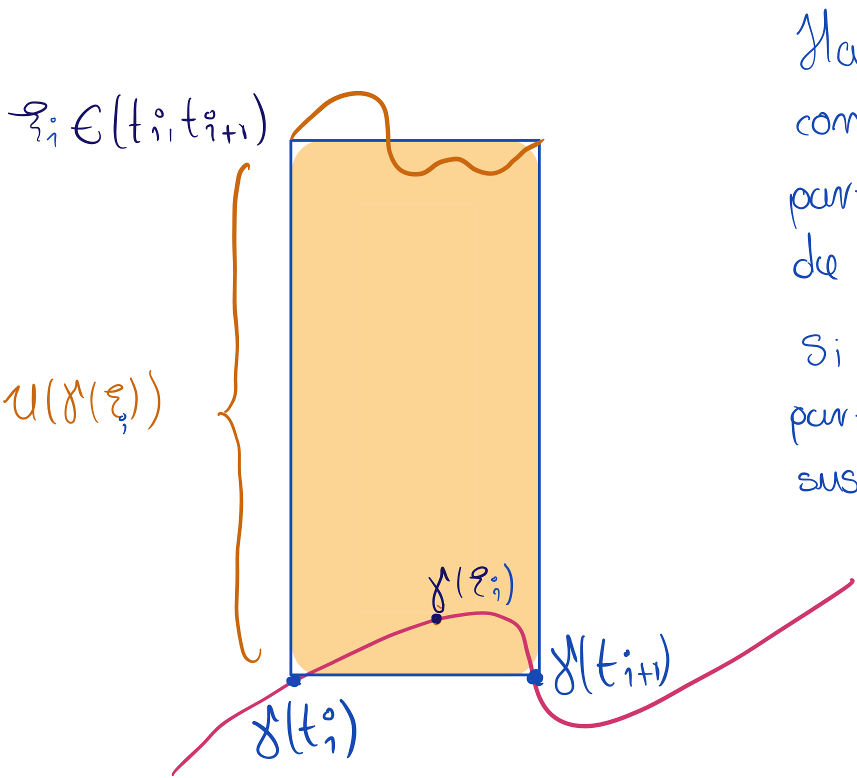
función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sobre una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ suave o suave a trozos como

$$\int_\gamma u \; dr := \int_a^b u(\gamma(t)) \; \|\gamma'(t)\| \; dt,$$

Te da "el promedio" de u sobre γ.



- Calcula el área de la superficie en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$ entre $(\gamma(t), 0)$ y $(\gamma(t), u \circ \gamma(t))$



Hacemos estimación con rectángulos y particiones del dominio de la curva

Si $\{t_i\}$ $i=1,\dots,n$ es partición de (a,b) con sus respectivos ξ_i's

$\therefore$ área estimada

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\gamma'(\tilde{t}_i)|\,(t_{i+1}-t_i)\,u(\gamma(\xi_i))}_{\text{Suma de Riemann para } \int_a^b u(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt}$$

área del rectángulo $= |\gamma(t_{i+1})-\gamma(\gamma_i)| \cdot u(\gamma(\xi_i))$

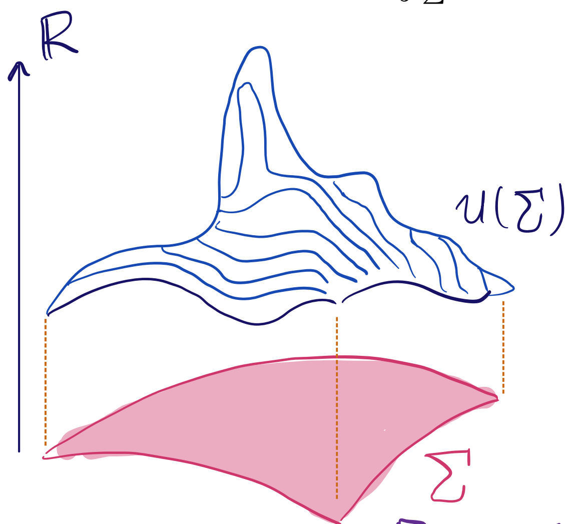
$= |\gamma'(\tilde{t}_i)|\,(t_{i+1}-t_i)\,u(\gamma(\xi_i))$

teorema de valor medio

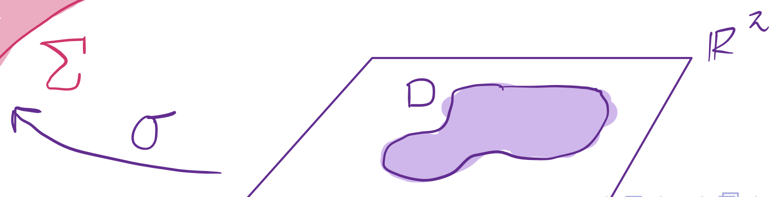
Superficies en $\mathbb{R}^3$

Sea Σ una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ con parametrización
$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^3$ que contiene a Σ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de u sobre Σ es

$$\int_\Sigma u \ \mathrm{dS} = \int_D u(\sigma) \ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| dxdy,$$

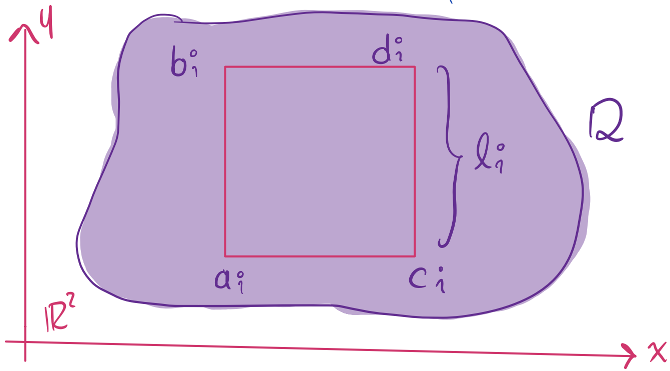


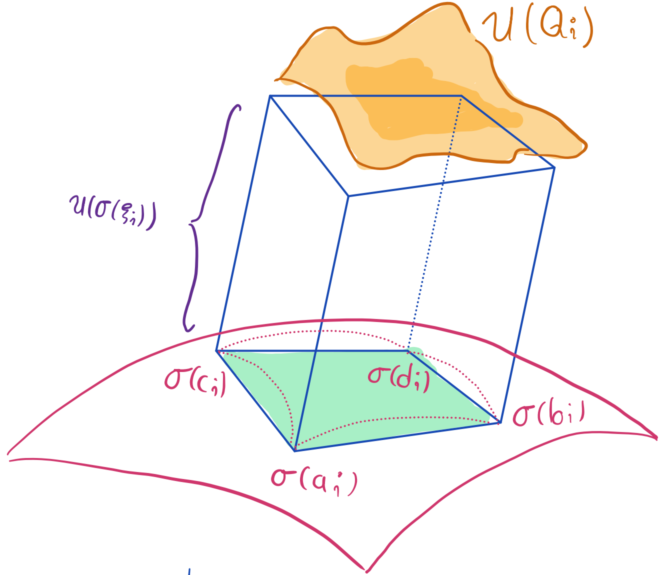
- esta vez queremos calcular el promedio de los valores de u en Σ
- el volúmen entre las dos superficies



De nuevo aproximamos por cubos:

Sea Q_i un cuadrado en Q $a_i=(t_i,s_i)$, $b_i=(t_i,s_i+l_i)$, $c_i=(t_i+l_i,s_i)$, $d_i=(t_i+l_i,s_i+l_i)$ y $\xi_i\in Q_i$





volumen del cubo $= u(\sigma(\xi_i))\cdot\Big[\frac{1}{2}\big|(\sigma(b_i)-\sigma(a_i))\times(\sigma(d_i)-\sigma(a_i))\big|$
$+\frac{1}{2}\big|(\sigma(c_i)-\sigma(a_i))\times(\sigma(d_i)-\sigma(a_i))\big|\Big]$

$\xrightarrow{\text{Teorema valor medio}}$ $= u(\sigma(\xi_i))\Big[\frac{1}{2}\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial y}(\tilde{b}_i)\times\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\tilde{a}_1)\Big| + \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\tilde{c}_i)\times\frac{\partial\sigma}{\partial y}(\tilde{a}_1)\Big|\Big]\, l_i^2$

Sea $\{Q_i\}$ una partición finita de Ω de cuadrados lado l_i

$\therefore$ volumen aproximado

$$= \sum_i u(\sigma(q_i))\left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial y}(\tilde{b}_i)\times\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\tilde{a}_i)\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\tilde{c}_i)\times\frac{\partial\sigma}{\partial y}(\tilde{a}_i)\right|\right] l_i^2$$

que es una suma de Rieman para la integral

$$\int_\Omega u(\sigma)\cdot\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\times\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right| dx\,dy$$

Ahora consideremos una hipersuperficie Σ inmersa en $\mathbb{R}^N$ con parametrización $\sigma : D \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$.
Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$ que contiene a Σ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de u sobre Σ es

$$\int_\Sigma u \ \mathrm{dS} = \int_D u(\sigma(y)) \ \left|\det{}_N \left[\partial_{y_1}\sigma(y), \ \cdots , \ \partial_{y_{N-1}}\sigma(y), \ \widehat{n}(y)\right]\right| dy,$$

donde

$$\partial_{y_i}\sigma(y) = \begin{bmatrix} \partial_{y_i}\sigma_1(y) \\ \partial_{y_i}\sigma_2(y) \\ \vdots \\ \partial_{y_i}\sigma_N(y) \end{bmatrix}$$

y $\hat{n}(y)$ es el vector normal unitaria al subespacio $\sigma'(y)(\mathbb{R}^{N-1})$

Ejemplos

- Relación del volumen de $B \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$

$$\pi^{N/2} = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2}\, dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} e^{-r^2}\, dS\, dz$$

$$= \int_0^\infty A_{N-1}(\partial B_r(0))\, e^{-r^2}\, dz$$

$$= \int_0^\infty \omega_1 N r^{N-1} e^{-r^2}\, dr$$

$$= \frac{\omega_1 N}{2} \int_0^\infty \underbrace{s^{\frac{N-2}{2}}}_{s^{\frac{N}{2}-1}} e^{-s}\, ds = \frac{\omega_1 N}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$$

$r = |x|$

$s = r^2$

$ds = 2r\, dr$

Finalmente usamos la identidad $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$

y así $\quad \omega_1 = \dfrac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$

- Área de $\partial B_1(0)$ en $\mathbb{R}^3$

Sea $\sigma(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)$

la proyección estereográfica inversa en el polo norte

$$\text{Área de } \partial B_1(0) = \int_{\partial B_1(0)} 1 \, dS = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial\sigma}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} \right| dx\,dy$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{2(y^2-x^2+1)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{2(x^2-y^2+1)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\times\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^2\cdot\left|\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right|^2\cdot \sin^2(\theta)$$ ángulo que forman

$\theta = \frac{\pi}{2}$ son ortogonales

$$= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^8}\left[16\,(1+x^2+y^2)^4\right]$$

$$\therefore \quad \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\times\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right| = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Entonces, en coordenadas polares $\sqrt{x^2+y^2}=r$, $\alpha = \arctan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\times\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right|dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr\,d\alpha$$

$$= 8\pi\int_0^{\infty}\frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr = 4\pi$$

$\therefore$ área de $\partial B_1(0) = 4\pi$.

Nota $\displaystyle\int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} = \frac{1}{2}$ pues ...

Teoremas de integración por partes y formulas de Green

Sea Ω un abierto acotado con frontera clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1 (de Green-Gauss)

Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *es clase* $\mathcal{C}^1$,

$$\int_\Omega u_{x_i}\ dx = \int_{\partial\Omega} u\widehat{n}_i\ dS.$$

Teorema 2 (Integración por partes)

Si $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *son clase* $\mathcal{C}^1$,

$$\int_\Omega u_{x_i} v\ dx = -\int_\Omega u v_{x_i}\ dx + \int_{\partial\Omega} u\widehat{n}_i\ dS.$$

Teorema 3 (Identidades de Green)

Si $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *son clase* $\mathcal{C}^2$.

(a) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} \; dS$, *donde* $\frac{\partial u}{\partial \widehat{n}}$ *es la derivada de* u *en la dirección del vector normal exterior unitario* $\widehat{n}$, *i.e.*, $\frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} := \nabla u \cdot \widehat{n}$.

(b) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = -\int_\Omega u \Delta v \; dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \widehat{n}} \; dS$