ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

2023 - 2

Soluciones a ciertos problemas

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y sean $\Omega := (0, \infty) \times \mathbb{R}$ y $\Omega^+ := (0, \infty) \times (0, \infty)$.

   (a) (3 puntos) Usando el método de características, encuentra una solución para

   $$(\partial_t + \partial_x)u = 0 \quad \text{en } \Omega^+, \quad u(0,x) = f(x), \quad u(t,0) = g(t), \quad x, t \geq 0. \qquad (1)$$

   (b) (2 puntos) En el problema (1), ¿qué deben satisfacer f y g para que la solución u sea diferenciable en Ω^+?

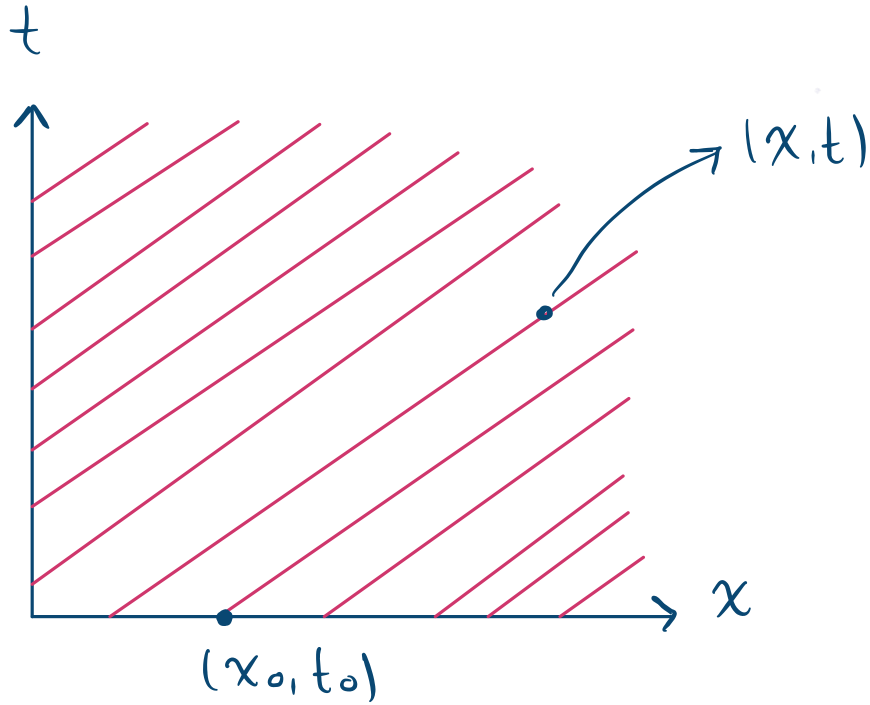
En este caso, la solución (de existir) es constante sobre sus curvas características $s \longmapsto (t(s), x(s))$

El sistema característico asociado es

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 1 & x(0) = x_0 \\ \dot{t}(s) = 1 & t(0) = t_0 \end{cases}$$

$\therefore$ las soluciones son $x = s + x_0$ y $t = s + t_0$

Asi $x - t = x_0 - t_0$ es la recta que pasa por (x_0, t_0)



∴ usando las condiciones iniciales

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } t < x \\ g(t_0) & \text{si } x < t \end{cases} = \begin{cases} f(x-t) & \text{si } t < x \\ g(t-x) & \text{si } x < t \end{cases}$$

Entonces bajo el supuesto de que u existe y es diferenciable, u está obligada a seguir la fórmula en $\{x<t\}$ y $\{t<x\}$

Del análisis en la interfaz $\{x=t\}$, debería ocurrir:

(CONTINUIDAD) $g(0)=f(0)$ pues $\lim\limits_{t\to x^+} u(t,x) = g(0)$

$$\lim_{t\to x^-} u(t,x) = f(0)$$

(DIFERENCIABILIDAD) $f'(0) = -g'(0)$ pues

$$u_x(t,x) = \begin{cases} f'(x-t) & \text{si } t<x \\ -g'(t-x) & \text{si } t>x \end{cases}$$

$$u_t(t,x) = \begin{cases} -f'(x-t) & \text{si } t<x \\ g'(t-x) & \text{si } t>x \end{cases}$$

Además que f y g sean diferenciables.

2. * (5 puntos) Aplica el método de curvas características para calcular la solución de

$$u_t + 5xt^2 u_x = u + 2 \quad \text{en } (0,\infty)\times\mathbb{R},$$
$$u(0,x) = x + 2.$$

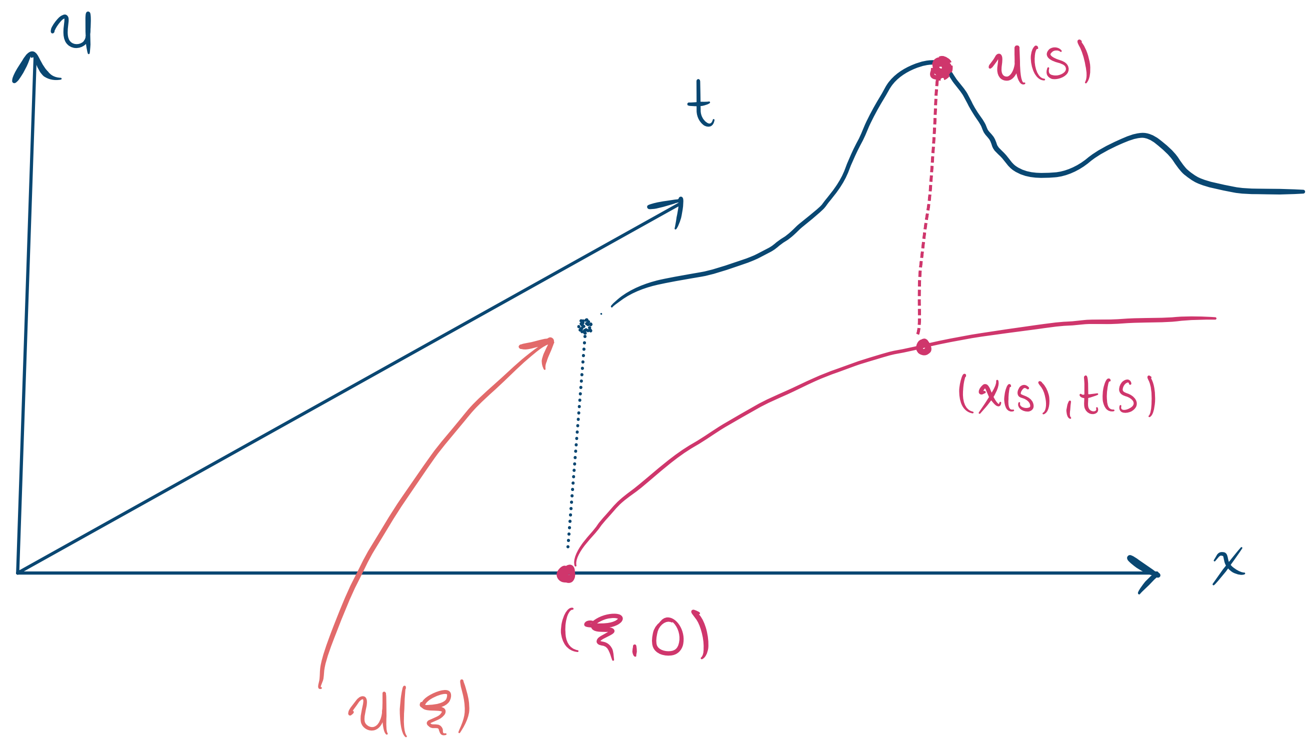
Haz un dibujo de las curvas características en el plano y encuentra la solución explícita.

Aquí las curvas características $(x(s), t(s))$ y $u(s) = u(x(s), t(s))$ deben satisfacer:

$$\nabla u(x(s), t(s)) \cdot (\dot{x}(s), \dot{t}(s)) = \dot{u}(s)$$

El sistema característico es

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 5xt^2 & x(0) = \xi, \\ \dot{t}(s) = 1 & t(0) = 0, \\ \dot{u}(s) = u + 2 & u(0) = \xi + 2, \end{cases}$$



Hay que saber resolver el sistema:

es claro $t(s) = s$ y nos queda $\frac{\dot{x}(s)}{x(s)} = 5s^2$

integrando: $\log(x(s)) - \log(x(0)) = \frac{5}{3} s^3$

despejando: $x(s) = \xi \cdot \exp\left[\frac{5}{3} s^3\right]$

Con un truco similar: $u(s) = e^s(\xi+4)-2$

Comenzamos bajo el supuesto de que u existe y satisface el sistema característico y hallamos la fórmula

$$u(\underbrace{\xi \cdot e^{5/3 s^3}}_{x}, \underbrace{s}_{t}) = e^s(\xi+4)-2$$

despejando x y t obtenemos

$$u(x,t) = e^t\left(x e^{-5/3 t^3} + 4\right) - 2$$

$$u(x,0) = (x+4)-2 = x+2$$

Nota: hay que revisar que el anzats sea una solución de facto.

3. * (5 puntos) Encuentra la (única) solución de entropía de

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Recordar un poco de teoría:

Theorem 4.10. *If $q \in C^2(\mathbb{R})$ is strictly convex or concave and g is bounded, there exists a unique entropy solution of the problem*

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.63}$$

del Salsa

Theorem 4.11. *Let $q \in C^2(\mathbb{R})$ be strictly convex and $q'' \geq h > 0$ or strictly concave and $q'' \leq -h < 0$.*

a) *If $q'' \geq h$ and $u_L > u_R$ or $q'' \leq -h$ and $u_- < u_+$, the unique entropy solution is given by the shock wave*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_R & x > \sigma(u_L, u_R)\, t \\ u_L & x < \sigma(u_L, u_R)\, t \end{cases} \tag{4.66}$$

[14] For the proof, see e.g. [18], *Smoller, 1983.*

Cuando

$$g := \begin{cases} u_R \text{ si } x > 0 \\ u_L \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$u_R, u_L \in \mathbb{R}$ constantes.

where

$$\sigma(u_L, u_R) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L}.$$

b) *If $q'' \geq h$ and $u_L \leq u_R$ or $q'' \leq -h$ and $u_L > u_R$, the unique entropy solution is given by the rarefaction wave*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & x < q'(u_L)\, t \\ r\left(\frac{x}{t}\right) & q'(u_L)\, t < x < q'(u_R)\, t \\ u_R & x > q'(u_R)\, t \end{cases}$$

where $r = (q')^{-1}$ is the inverse function of q'.

La estrategia:

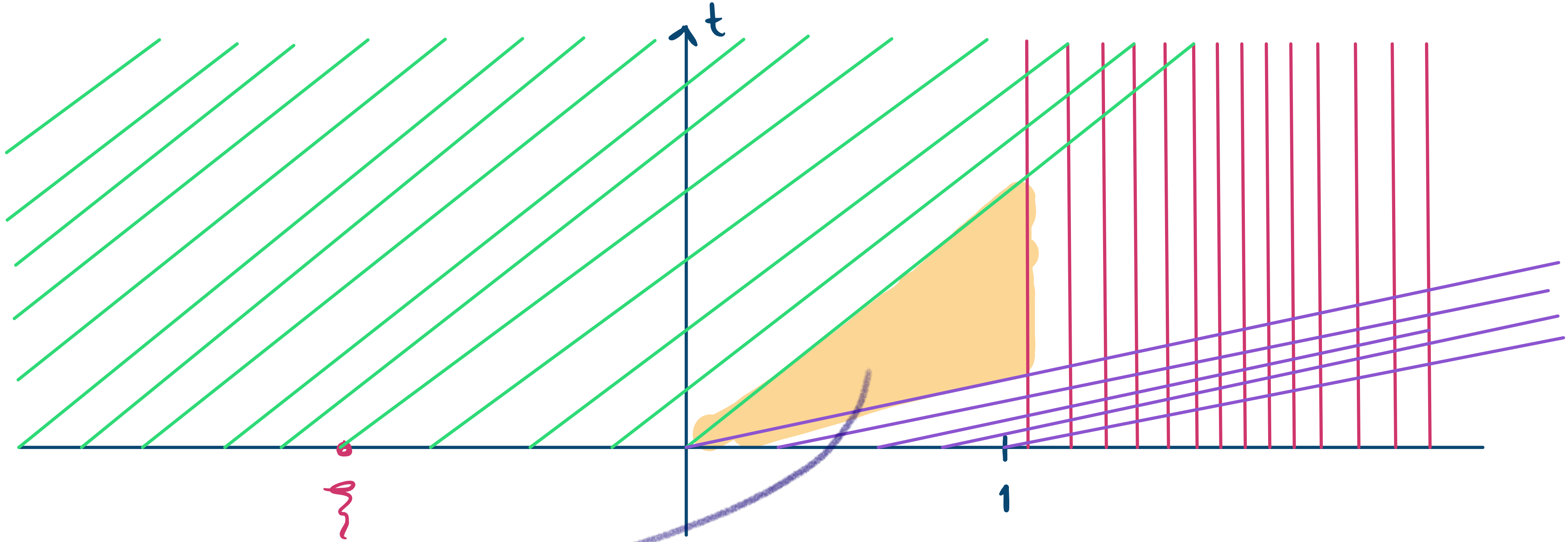
ir analizando por regiones y verificar que, en cada región,

u = continua o onda de choque o onda de rarefacción

Paso 1. Las características: la característica que pasa por $(\xi, 0)$ es

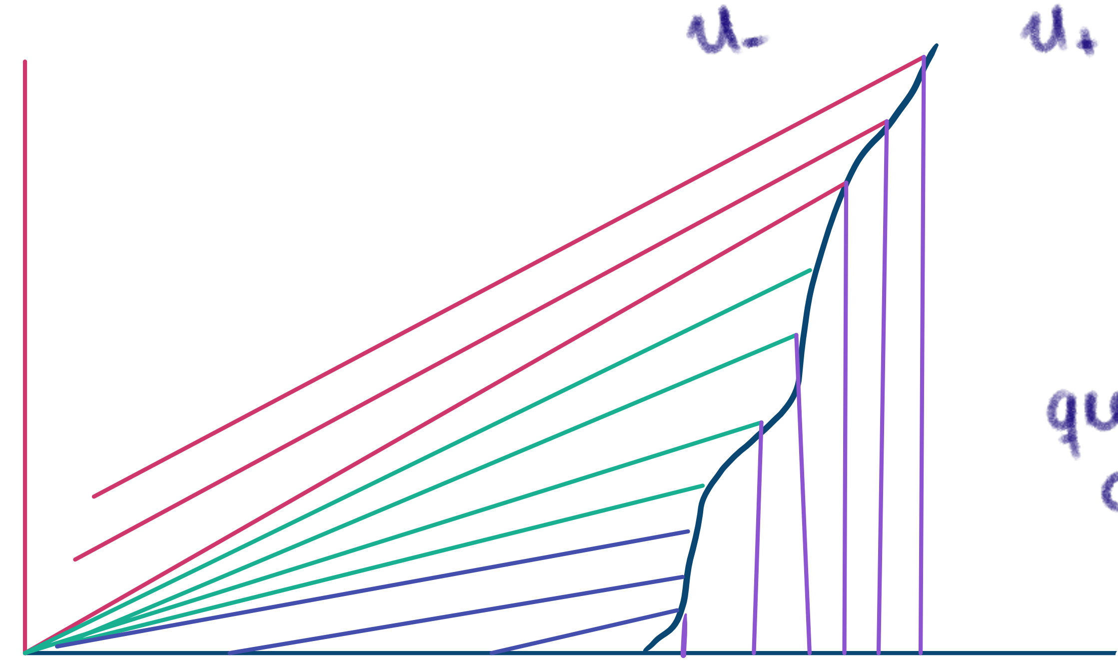
$$x(t) = g(\xi)t + \xi$$

$$\begin{cases} x = t + \xi & \text{si } \xi < 0 \\ x = 2t + \xi & \text{si } \xi \in (0,1) \\ x = \xi \quad \text{si} & \text{si } \xi > 1 \end{cases}$$



la vamos a llenar con una onda de rarefacción

- Ver "como interactua" la onda de rarefacción x/t con las rectas verticales para que el choque quede entrópico



buscamos una curva de choque s que nos proporcione un choque entrópico

esta depende del flujo $q(u) = \frac{1}{2}u^2$ y de la condición de Rankine-Hugoniot tiene que tener pendiente

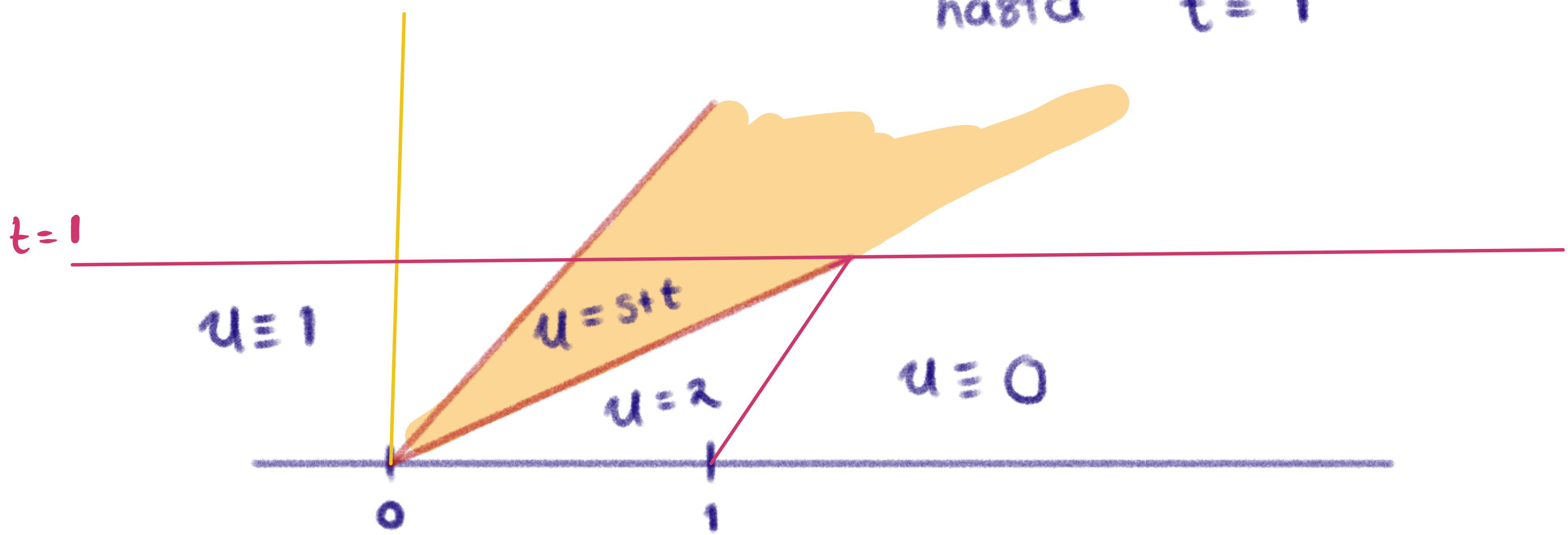
$$s'(t) = \left[\frac{q(u_+) - q(u_-)}{u_+ - u_-} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$$

Resolvemos para todos los tipos de u_- pues $u_+ \equiv 0$ siempre

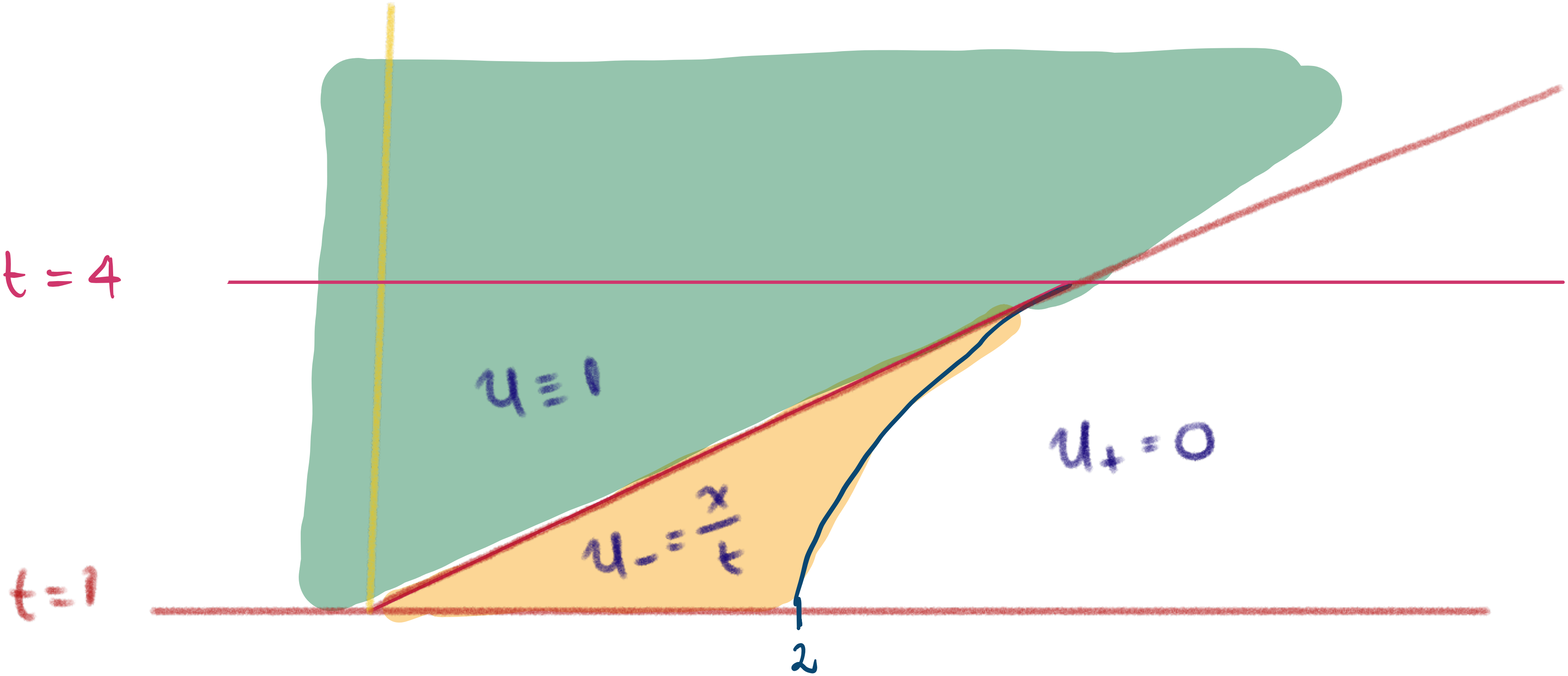
Empezamos desde $s(0) = 1$ y $u_- \equiv 2$

obtenemos $s(t) = t+1$, que se puede extender hasta $t = 1$



luego empezamos con $s(1)=2$ y $u_-=\frac{x}{t}$

Aquí $s(t)=2\sqrt{t}$

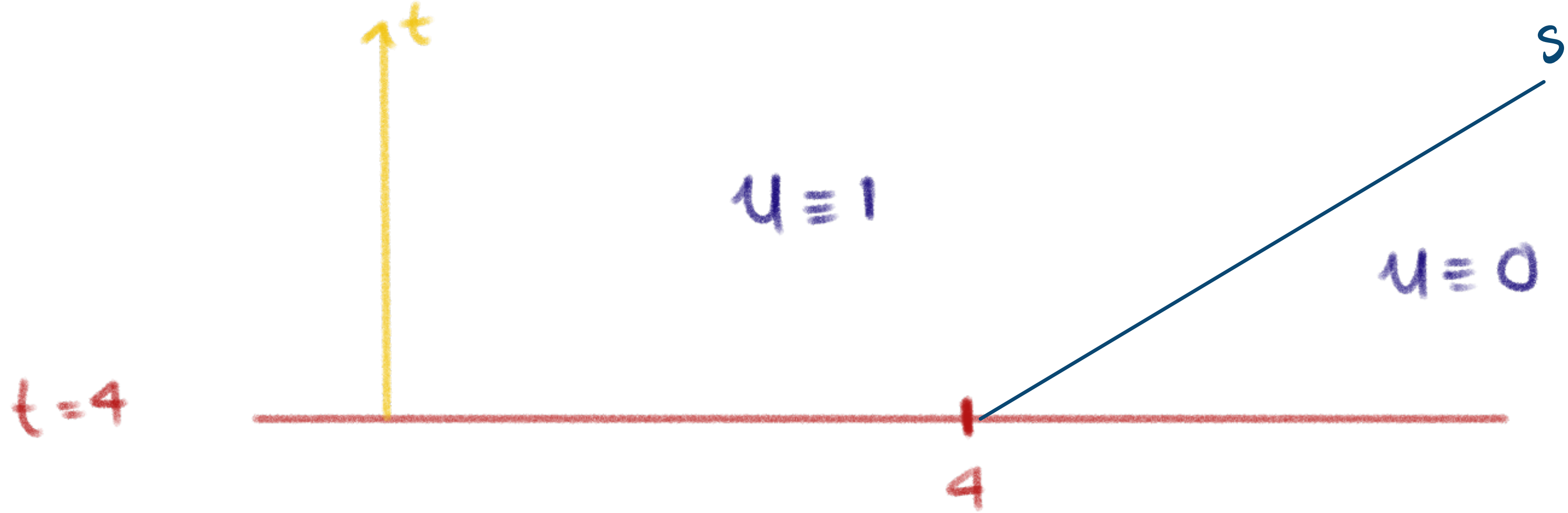


Se puede extender hasta $t=4$ pues en ese tiempo $S(4)=4$ llega a la otra interfaz

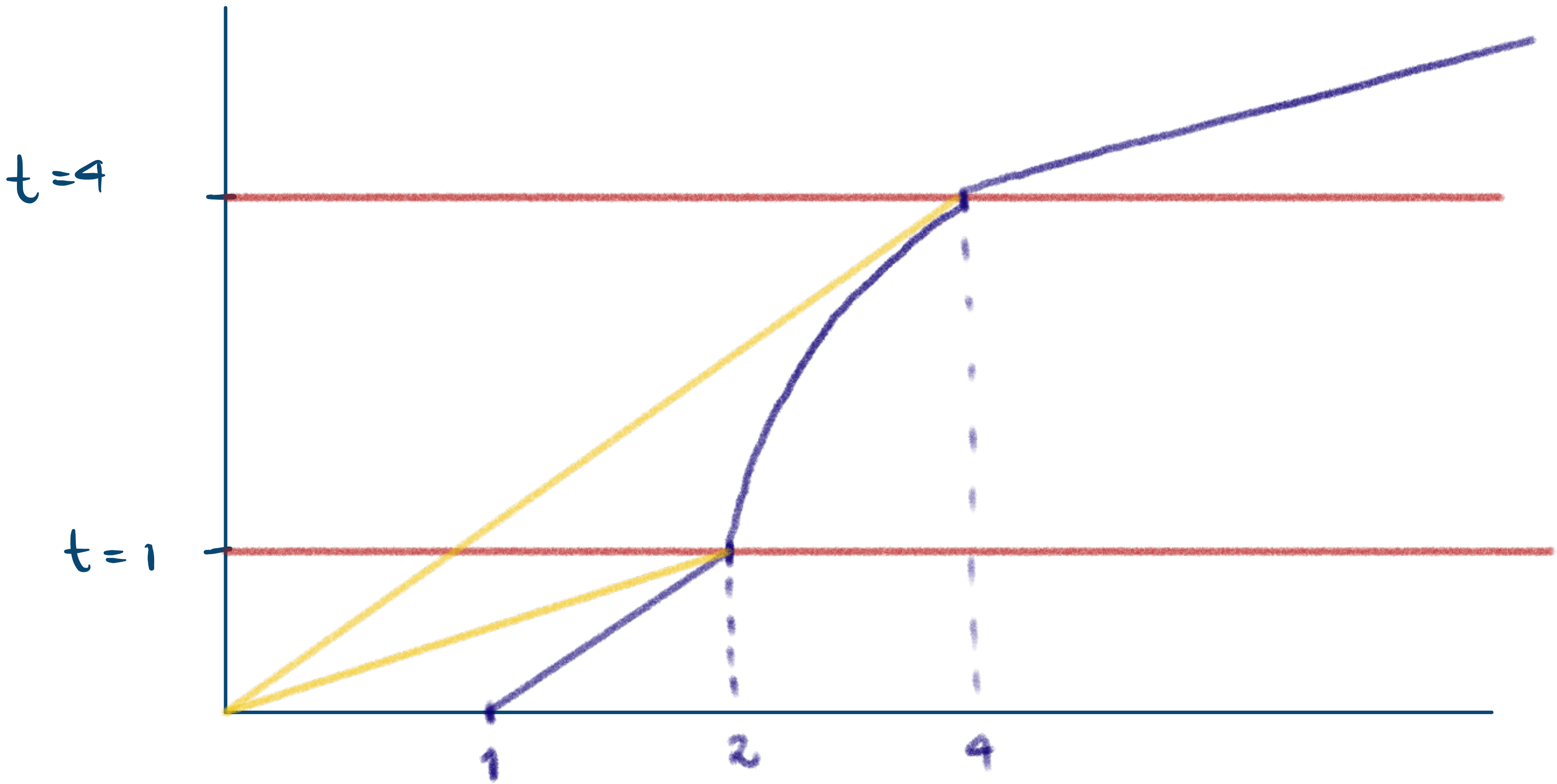
Finalmente, después de $t=4$ tenemos

$u_- \equiv 1$ y así $s' = \frac{1}{2}$ y $s(4) = 4$

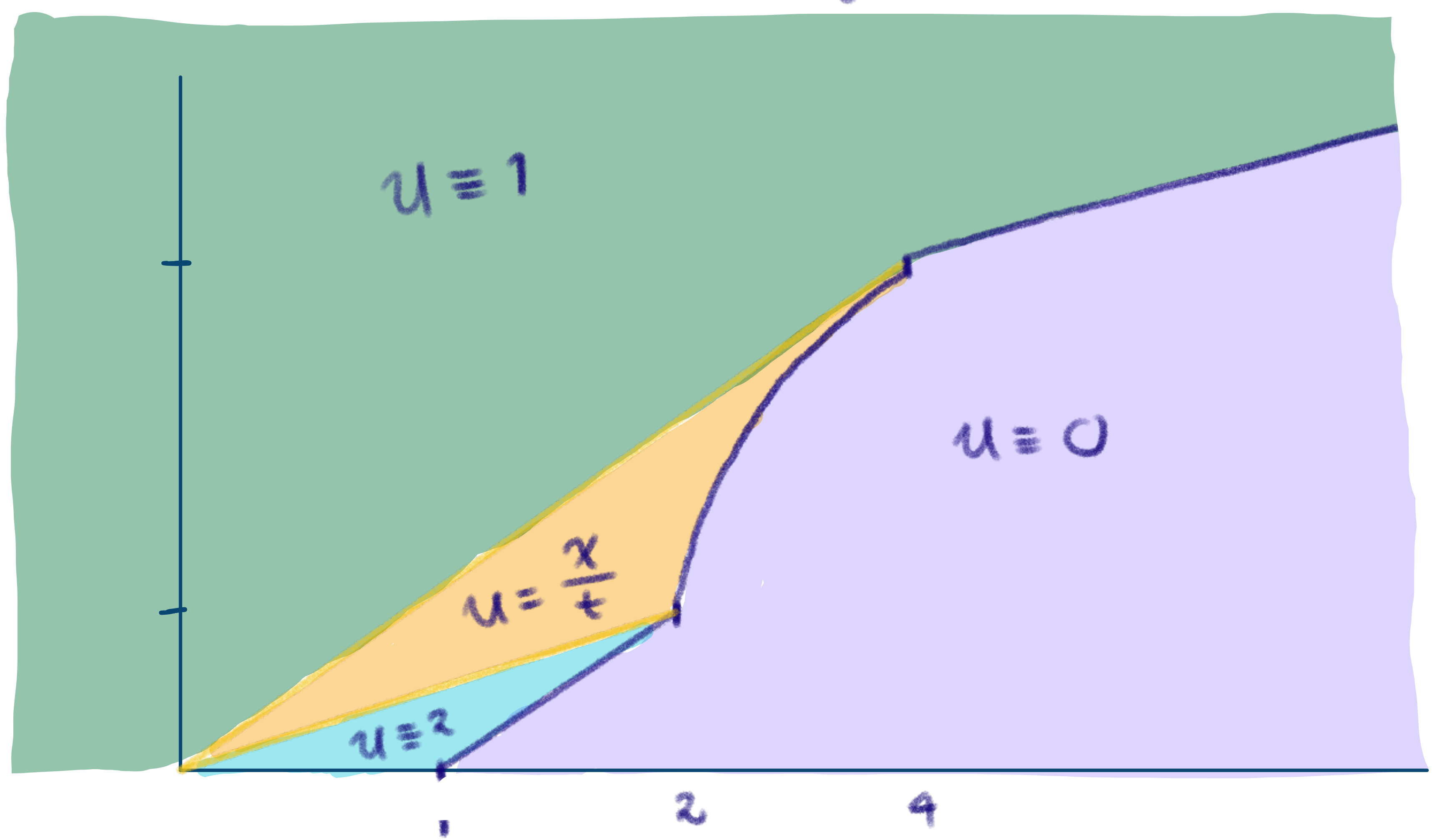
$\therefore \; s(t) = \frac{1}{2}t + 2$



En total, la curva de choque debería tener el perfil:



Un diagrama de la sol. u que proponemos es el siguiente



Hay que verificar que todos los choques sean entrópicos. para esto basta comprobar la condición

$$q'(u_+) < s'(t) < q'(u_-)$$

desigualdad de entropía.

que en este caso es $\quad u_+ < \frac{1}{2}(u_+ + u_-) < u_-$

(3 puntos) [Conservación de la energía] Sea $u \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ una solución de la ecuación de onda $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ con condiciones iniciales $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = g(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, donde $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ y $g, f' \in L^2(\mathbb{R})$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} |f'|^2 < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} |g|^2 < \infty.$$

La *energía* de la solución u al tiempo $t > 0$ se define como

$$E(u(t,\cdot)) := \int_{\mathbb{R}} |u_t(t,x)|^2 + |u_x(t,x)|^2 \, dx.$$

Demuestra que la energia está bien definida y que se mantiene constante en el tiempo; es decir, para $t > 0$,

$$|E(u(t,\cdot))| < \infty \qquad \text{y} \qquad t \mapsto E(u(t,\cdot)) \quad \text{es constante.}$$

Se usa la fórmula de D'alembert.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(z)\,dz$$

$$= F(x+t) + G(x-t)$$

$$u_t = F'(x+t) - g'(x-t) \qquad u_x = F'(x+t) + g'(x-t)$$

$$u_t^2 + u_x^2 = 2\left(F'(x+t)^2 + g'(x-t)^2\right)$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_x^2 = 2\int_{\mathbb{R}} \left(\tfrac{1}{2} f'(x+t) + \tfrac{1}{2} g(x+t)\right)^2 dx$$

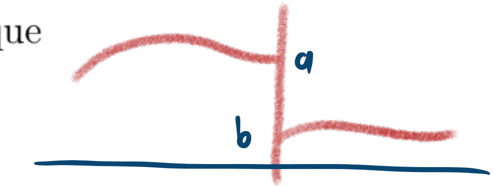
$$+ 2\int_{\mathbb{R}} \left(\tfrac{1}{2} f'(x-t) - \tfrac{1}{2} g(x-t)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f' + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g \quad < \infty$$

invarianza bajo traslaciones en $\mathbb{R}$

por hipótesis

4. (5 puntos) Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0((-\infty, 0]) \cap C^0(0, \infty)$ tal que



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = b,$$

para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sea u la solución (dada por el núcleo del calor) de la ecuación $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = 0$ en $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ con condición incial $u(0,x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el valor del límite $\lim_{t\to 0^+} u(t, 0)$?

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2t}} f(u)\, du$$

$$z = \frac{u-x}{\sqrt{2t}}$$

$$dz = \frac{du}{\sqrt{2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} f(x + z\sqrt{2t})\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2} f(x+z\sqrt{2t})\, dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} f(x+z\sqrt{2t})\, dz$$

$x = 0$

Por convergencia dominada $\quad x=0$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-z^2} f(x+z\sqrt{2t})\,dz \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2} a\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} a$$

Similarmente

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} f(x+z\sqrt{2t})\,dz \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2} b$$

$$\therefore \quad u(0,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{a+b}{2}$$