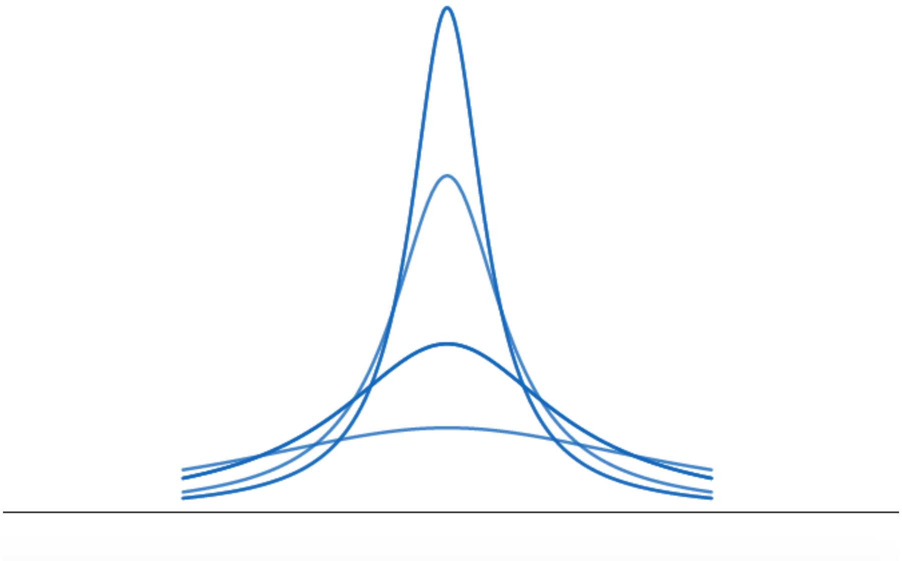
Todo lo que siempre quisiste saber de cálculo, pero temías preguntar



Ecuaciones Diferenciales Parciales

2023-1

Agosto 2022

Índice general

Guía para el alumno

> Lo mas terrible se aprende enseguida y lo mas hermoso nos cuesta la vida
>
> — Silvio Rodriguez, Canción del elegido

En esta guía presentamos los resultado de cálculo básico necesarios para que tú, alumna y alumno, puedas enfrentarte a los temas de este curso.

Aquí encontrarás una guía matemática pensada especialmente para que puedas identificar las hipótesis necesarias de los resultados, aplicar las fórmulas y teoremas, sin la necesidad de invertir tiempo extra estudiando de nuevo estos conceptos.

El Capítulo 1 consiste de un repaso de las nociones básicas de cálculo diferencial. Además incluye un ejemplo práctico de los pasos que hay que tener en cuenta para aplicar un cambia de variable a una ecuación diferencial parcial. En Capítulo 2 estudiamos funciones definidas en términos de integrales, sobre todos sus propiedades de regularidad. Estás funciones son espacialmente importantes pues algunas soluciones a ecuaciones diferenciales parciales pueden ser representadas mediante una función de este tipo. En el Capítulo 3 hallamos breve un recordatorio de cómo calcular integrales sobre superficies, pues estás se usaran cuando estudiemos las propiedades de las soluciones a la ecuación de onda en varias dimensiones. En el Capítulo 4 enunciamos resultados de la teoría de Análisis de Fourier que nos permitirán estudiar soluciones a ecuaciones diferenciales que admiten una representación en series. Estas aparecen cuando estudiamos problemas para la ecuación de onda y de calor en intervalos acotados mediante el método de separación de variables.

Capítulo 1

Cálculo diferencial

En este capítulo recordaremos la definición de la noción de *derivada* en un punto de una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y las propiedades de las funciones que son diferenciables. Aunque usted ya lo sabe, cabe mencionar que esta noción captura de la idea de que una función pueda ser aproximada por una función lineal en un punto. De esta manera, estudiar la derivada de una función en un punto nos permite estudiar *cómo se aproxima a ese punto*.

Para comenzar establezcamos la notación que usaremos. Al espacio de funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ lo denotaremos por

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ es lineal}\}.$$

Este es un espacio vectorial y está equipado con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} := \sup_{y\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Durante esta sección Ω denotara un abierto de $\mathbb{R}^n$.

§1.1 Derivada

Definición 1.1: Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $x \in \Omega$ si existe un $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|u(x+h) - u(x) - T(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

En este caso, la función T es única y se denota por $u'(x)$.

Durante la mayor parte del curso, nos interesará estudiar funciones definidas u diferenciables en un abierto Ω y continuas en $\overline{\Omega}$, que tomen valores en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2: Toda función $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y $T'(x) = T$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, pues

$$T(x+h) - T(x) - T(h) = 0 \qquad \text{para cada } h \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 1.3: La función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = \|x\|_{\mathbb{R}^2}^2$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $u'(x)y = 2x \cdot y$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^2$, pues

$$\|x+y\|_{\mathbb{R}^2}^2 = \|x\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2x \cdot y + \|y\|_{\mathbb{R}^2}^2$$

y, así,

$$\frac{\left| \|x+y\|_{\mathbb{R}^2}^2 - \|x\|_{\mathbb{R}^2}^2 - 2x \cdot y \right|}{\|y\|_{\mathbb{R}^2}} = \|y\|_{\mathbb{R}^2} \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

Proposición 1.4: Si $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x, entonces es continua en x.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Definición 1.5: Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es continuamente diferenciable en Ω si es diferenciable en cada punto de Ω y si el mapa $x \mapsto u'(x)$ es continuo.

Al conjunto de de funciones continuamente diferenciables de Ω en $\mathbb{R}^m$ lo denotamos por

$$\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}^m \mid u \text{ es continuamente diferenciable}\}.$$

En el caso de las funciones continuamente diferenciables de Ω en $\mathbb{R}$ a este conjunto lo denotamos simplemente como $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Otra manera de llamar a las funciones de $\mathcal{C}^1(\Omega)$ es como *funciones de clase $\mathcal{C}^1$*.

§1.2 Regla de la cadena y derivadas parciales

Teorema 1.6 (Regla de la cadena): Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^p$ abiertos. Si $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en x, $\varphi(\widetilde{\Omega}) \subset \Omega$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\varphi(x)$, entonces $u \circ \varphi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x y

$$(u \circ \varphi)'(x) = u'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x). \tag{1.1}$$

Demostración. Ejercicio. □

Escribimos a un punto $y \in \mathbb{R}^n$ en términos de sus coordenadas como $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Definición 1.7: Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, u es parcialmente diferenciable en la i-ésima coordenada (en la coordenada x_i) en el punto $y \in \Omega$ si la función

$$t \mapsto u(y_1, y_2, \ldots, y_i + t, \ldots, y_n)$$

definida en una vecindad de 0 es diferenciable en $0 \in \mathbb{R}$. A tal derivada la denotamos por $\partial_i u(y)$, $u_{x_i}(y)$ o bien $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)$ y la llamamos i-ésima derivada parcial en y.

Si u es parcialmente diferenciable respecto a todas sus coordenadas la llamaremos simplemente *parcialmente diferenciable.*

Obs: 1.8: Ya que $t \mapsto u(y_1, y_2, \ldots, y_i + t, \ldots, y_n)$ es una función definida en un abierto de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Como es usual[1] entonces, se tiene la convención de que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \in \mathbb{R}.$$

[1] Se identifica a $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con su valor en 1.

Entonces si u es parcialmente diferenciable respecto a la coordenada i en cada punto $x \in \Omega$ tenemos una función

$$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

a la que llamamos, la i-ésima derivada parcial de u.

Definición 1.9: Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es parcialmente diferenciable [en todas sus variables], el gradiente de u en x es el vector

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right).$$

Obs: 1.10: Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto x, entonces de la regla cadena se sigue que todas la derivadas parciales existen y que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = u'(x)e_i,$$

donde e_i es el $i-$ésimo vector canónico. De esta manera, usando la linealidad de $u'(x)$ se sigue que

$$u'(x)y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)y_i = \nabla u(x) \cdot y.$$

Obs: 1.11: Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto x, entonces cada una de sus funciones componenetes $\varphi_j : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x resulta que

$$\begin{aligned} \varphi'(x)y &= (\varphi_1'(x)y, \varphi_2'(xy), \ldots, \varphi_m'(x)y) \\ &= (\nabla\varphi_1(x) \cdot y, \nabla\varphi_2(x) \cdot y, \ldots, \nabla\varphi_m(x) \cdot y). \end{aligned}$$

Por lo tanto φ' es la función lineal dada por por la matriz

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \partial_2\varphi_1(x) & \cdots & \partial_n\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \partial_2\varphi_2(x) & \cdots & \partial_n\varphi_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1\varphi_m(x) & \partial_2\varphi_m(x) & \cdots & \partial_n\varphi_m(x) \end{bmatrix}.$$

Obs: 1.12: En estos términos, la ecuación (1.1) puede escribirse como un simple producto de matrices:

$$(u \circ \varphi)'(x) = \underbrace{u'(\varphi(x))\varphi'(x)}_{\text{producto de matrices}}$$

En general, si una función es parcialmente diferenciable respecto a todas sus variables en un punto x, no necesariamente tiene que existir su derivada en tal punto.

Ejemplo 1.13: La función

$$u(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0, \end{cases}$$

es parcialmente diferenciable en $(0,0)$ y sin embargo, su derivada no existe en este punto[2].

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 1.14: Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es clase $\mathcal{C}^1$ si y sólo si es parcialmente diferenciable en cada cada punto de x y todas sus derivadas parciales $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ son continuas.

Demostración. Puede consultar [Cla15, Teorema 9.26] para un resultado más general, o bien [Tao16, Theorem 6.3.8] para nuestro contexto. □

Corolario 1.15: Una función $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es clase $\mathcal{C}^1$ si y sólo si φ_j es parcialmente diferenciable en cada cada punto de $x \in \Omega$ y todas sus derivadas parciales $x \mapsto \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)$ son continuas,

[2] No existe ninguna otra derivada direccional

en cuyo caso $\varphi'(x)$ es representada por la matriz

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \partial_2\varphi_1(x) & \cdots & \partial_n\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \partial_2\varphi_2(x) & \cdots & \partial_n\varphi_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1\varphi_m(x) & \partial_2\varphi_m(x) & \cdots & \partial_n\varphi_m(x) \end{bmatrix}.$$

§1.3 Derivadas (parciales) dobles

Definición 1.16: Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es dos veces continuamente diferenciable si es clase C^1 y cada una de sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_n}$, es clase C^1.

El siguiente resultado es muchas veces olvidado, no obstante puede ser harto importante para simplificar una gran de cálculos y expresiones durante la práctica.

Teorema 1.17 (Derivadas mixtas): Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es dos veces continuamente diferenciable entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \quad \text{para cada } x_0 \in \Omega \text{ y } 1 \leq i, j \leq n.$$

Demostración. Puede consultar [Tao16, Theorem 6.5.4]. □

§1.4 Regla de la cadena y cambios de variable

Definición 1.18: Un cambio de variable es una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que $\det(\varphi'(x)) \neq 0$ para cada $x \in \Omega$.

Durante el curso puedes enfrentarte a la siguiente situación: Dada una ecuación diferencial que puede parecer muy compleja, en tanto que podemos hallar derivadas parciales mixtas o *no linealidades*, es posible hallar una cambio de variable φ que transforme la ecuación dada en una más sencilla. Antes de ver un ejemplo repasemos algunos casos particulares de la regla de la cadena.

Ejemplo 1.19: Supongamos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función clase $\mathcal{C}^1$ y que $\gamma : \mathbb{R} \to \Omega$ es una curva diferenciable dada por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$. Entonces $u \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y

$$\begin{aligned}\frac{d(u \circ \gamma)}{dt}(t) &= u'(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\end{aligned}$$

Ejemplo 1.20: Sea $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ Supongamos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función clase $\mathcal{C}^1$ y que $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ es clase $\mathcal{C}^1$ dada por $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_3(y))$. Entonces $u \circ \varphi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ es clase $\mathcal{C}^1$ y $(u \circ \varphi)'(y) = u'(\varphi(y))\varphi'(y)$. De aquí se sigue que

$$\partial_j(u \circ \varphi)(y) = \nabla u(\varphi(y)) \cdot \nabla \varphi_j(y)$$

Ejemplo 1.21 (Notación de Leibniz[3])**:** Para sola una variable tenemos que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si $\hat{t} = \varphi(t)$

$$\frac{du(\varphi(t))}{dt} = \frac{du}{d\hat{t}}\,(\varphi(t))\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Se suele escribir $\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$, sin embargo puede confundir a alguien si no se recuerdan en dónde está evaluada cada función.

Tomando $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\gamma(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))$. Usando esta notación[4] se puede escribir la derivada como

[3] Este ejemplo es una aportación de Omar (2022-1)

[4] De nuevo hay un abuso de notación, pues no se especifican los puntos donde están evaluadas.

$$\frac{du(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \hat{x}}\frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \hat{y}}\frac{d\hat{y}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \hat{z}}\frac{d\hat{z}}{dt} = \nabla u \cdot \frac{d\gamma}{dt}.$$

Es común que se especifiquen las variables sobre las que las que se toma el gradiente poniéndolas en el símbolo (como subíndice) ∇: en este caso sería $\nabla_{\hat{x},\hat{y},\hat{z}}$

Si en vez de tomar una "curva", tomamos un campo vectorial

$$\varphi(x,y,z) = (\hat{x}(x,y,z), \hat{y}(x,y,z), \hat{z}(x,y,z)),$$

cada función coordenada es un campo escalar y la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial u(\varphi(x,y,z))}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \hat{z}}\frac{\partial \hat{z}}{\partial x_i} = \nabla u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

donde $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = (\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i}, \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i}, \frac{\partial \hat{z}}{\partial x_i})$..

Un ejemplo aplicado para una propiedad de operador Laplaciando puede ser consultado en https://math.stackexchange.com/questions/3632836/rotational-invariance-of-laplacian-operator.

Ejemplo 1.22: Usando un cambio de variable φ, vemos que el problema

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - x\partial_x u & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da lugar al problema

$$(\mathcal{P}_\varphi) \qquad \begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cuya solución es conocida. $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, donde $\varphi(x,t) = \big(e^{-t}x, \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\big)$.

Escribamos $u(x,t) := v(\varphi(x,t))$. Entonces, por la regla de la cadena tenemos

$$\partial_x u = \partial_x v(\varphi)e^{-t} + \partial_t v(\varphi)\cdot 0 = \partial_x v(\varphi)e^{-t} \tag{1.2}$$

$$\partial_t u = -\partial_x v(\varphi)xe^{-t} + \partial_t v(\varphi)e^{-2t} \tag{1.3}$$

$$\partial_x^2 u = e^{-t}\left[\partial_x^2 v(\varphi)e^{-t} + (\partial_t\partial_x v)(\varphi)\cdot 0\right] = \partial_x^2 v(\varphi)e^{-2t} \tag{1.4}$$

Si u es solución de $(\mathcal{P})$, entonces $\partial_t u = \partial_x^2 u - x\partial_x u$. Entonces, sustituyendo obtenemos que

$$\partial_x^2 v(\varphi)e^{-2t} - x\partial_x v(\varphi)e^{-t} = -\partial_x v(\varphi)xe^{-t} + \partial_t v(\varphi)e^{-2t}.$$

Por lo tanto

$$\partial_x^2 v(\varphi) = \partial_t v(\varphi)$$

Recíprocamente, si escribimos $\varphi = \left(\widehat{x},\widehat{t}\right)$, entonces $v\left(\widehat{x},\widehat{t}\right)$ es solución de $(\mathcal{P}_\varphi)$ si y sólo si u es solución de $(\mathcal{P})$.

El problema

$$(\mathcal{P}_\varphi) \qquad \begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v & \widehat{x}\in\mathbb{R}, \quad \widehat{t}>0, \\ v(\widehat{x},0) = f(\widehat{x}) & \widehat{x}\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

es *el problema de Cauchy para la ecuación de calor* y sabemos que su solución está dada por

$$v\left(\widehat{x},\widehat{t}\right) = \frac{1}{\left(4\pi\widehat{t}\right)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\widehat{x}-y|^2}{4\widehat{t}}}u_0(y)\,dy.$$

Así podemos construir soluciones para $(\mathcal{P})$.

Capítulo 2

Funciones definidas con integrales

El objetivo de este capítulo es estudiar funciones definidas en términos de integrales como

$$v(y) = \int_\Omega \varphi(x,y)\ dx. \tag{2.1}$$

Aprenderemos a identificar las hipótesis sobre φ, su dominio y su regularidad que garanticen que v estén bien definida, sean continua o diferenciable.

En su versión más general, el resultado más importante para tener en cuenta es el Teorema de Convergencia Dominada, que repasamos en este capítulo. Las nociones clave serán la de convergencia uniforme y la de convergencia dominada.

§2.1 Un criterio de diferenciabilidad

Comenzamos con un ejemplo muy común durante el curso. Sea U un abierto de $\mathbb{R}$. Supongamos que $\varphi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y que admite derivada parcial continua en la primer coordenada.

Consideremos a la función, donde $f, g : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables.

$$u(t) := \int_{g(t)}^{f(t)} \varphi(t,s)\ ds$$

Consideremos las funciones

$$F(x,y,t) := \int_y^x \varphi(t,s)\ ds \quad \text{y} \quad G(t) := (f(t), g(t), t).$$

De esta manera $u(t) = (F \circ G)(t)$. El *teorema fundamental del cálculo* implica que F admite derivada parcial continua en la primera y la segunda variable, siendo

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, y, t) = \varphi(t, x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x, y, t) = -\varphi(t, y).$$

Ahora bien, veremos que F admite derivada parcial respecto a t y que ésta es exactamente $\displaystyle\int_y^x \partial_t \varphi(t, s)\, ds$.

Bien,

$$\left| \frac{F(x, y, t+h) - F(x, y, t)}{h} - \int_y^x \partial_t \varphi(t, s)\, ds \right|$$
$$\leq \int_y^x \left| \frac{\varphi(t+h, s) - \varphi(t, s)}{h} - \partial_t \varphi(t, s) \right| ds$$

Sabemos que

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{\varphi(t+h, s) - \varphi(t, s)}{h} - \partial_t \varphi(t, s) \right| = 0$$

para cada $(t, s) \in U \times \mathbb{R}$. Sin embargo, usamos que esta propiedad vale para $(t, s) \in U \times [y, x]$. Entonces, como $[y, x]$ es compacto tenemos que la continuidad (en el cero) anterior ocurre uniformemente en la variable $s \in [x, y]$. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $|h| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| \frac{\varphi(t+h, s) - \varphi(t, s)}{h} - \partial_t \varphi(t, s) \right| < \varepsilon \quad \text{para cada } s \in [y, x].$$

De esta manera

$$\int_y^x \left| \frac{\varphi(t+h, s) - \varphi(t, s)}{h} - \partial_t \varphi(t, s) \right| ds \leq \varepsilon(x - y)$$

siempre que $|h| < \delta_\varepsilon$. Esto demuestra que F es parcialmente diferenciable respecto a F en cada punto $(x, y, t) \in U \times U \times \mathbb{R}$ y que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = \int_y^x \partial_t \varphi(t, s)\, ds.$$

□

Bien, ya que $u(t) = (F \circ G)(t)$, se sigue del Teorema 1.6 que u es diferenciable y que en cada punto $t \in U$ y que

$$u'(t) = \nabla F(G(t)) \cdot G'(t).$$

Desarrollando esta expresión concluimos que

$$u'(t) = f'(t)\varphi(t, f(t)) - g'(t)\varphi(t, g(t)) + \int_{g(t)}^{f(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s)\ ds.$$

Bien, en total hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Regla de Leibniz)**:** Sean U un abierto de $\mathbb{R}$ y $\varphi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y que admite derivada parcial continua en la segunda coordenada.

Consideremos a la función, $u : U \to \mathbb{R}$

$$u(t) := \int_{g(t)}^{f(t)} \varphi(t, s)\ ds, \tag{2.2}$$

donde $f, g : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Entonces, u es diferenciable y

$$u'(t) = f'(t)\varphi(t, f(t)) - g'(t)\varphi(t, g(t)) + \int_{g(t)}^{f(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s)\ ds.$$

Demostración. □

Ahora bien, como especializaciones de este teorema tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 2.2: Sean U un abierto de $\mathbb{R}$, Ω un compacto en $\mathbb{R}$ y $\varphi : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ continua y que admite derivada parcial continua en la primer coordenada. Consideremos a la función, $u : U \to \mathbb{R}$

$$u(t) := \int_{\Omega} \varphi(t, s)\ ds,$$

Entonces, u es diferenciable y

$$u'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s)\ ds.$$

Corolario 2.3: Sean U un abierto de $\mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Consideremos a la función, $u : U \to \mathbb{R}$

$$u(t) := \int_{g(t)}^{f(t)} \varphi(s)\ ds,$$

donde $f, g : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Entonces, u es diferenciable y

$$u'(t) = f'(t)\varphi(f(t)) - g'(t)\varphi(g(t))$$

Obs: 2.4 (Importante): Hay distintas hipótesis sobre el dominio y sobre φ que garantizan cierta regularidad de una función definida en términos de una integral sobre un dominio más general (no necesariamente un intervalo), como (2.1), que proponemos como ejercicio. Las demostraciones serán evidentes después de haber leído esta sección, pues básicamente dependen de argumentos de convergencia uniforme.

La noción de continuidad uniforme es la calve en todos estos teoremas para asegurar que, en términos no rigurosos, *la derivada pasa por la integral.*

Proposición 2.5 (Continuidad): Sean U un abierto de $\mathbb{R}$ y $\varphi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Definamos $u : U \to \mathbb{R}$

$$u(t) := \int_{g(t)}^{f(t)} \varphi(t, s)\ ds,$$

donde $f, g : U \to \mathbb{R}$ son continuas. Entonces, u es continua.

Demostración. Ejercicio: Use que la composición de funciones continuas es continua. Al igual que en la prueba del Teorema 2.1. $\square$

Proposición 2.6: Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ compacto y $\varphi = U \times \Omega \to \mathbb{R}$ continua y que admite derivadas parciales continuas en las primeras m coordenadas.

Consideremos a la función, $u : U \to \mathbb{R}$

$$u(t) := \int_{\Omega} \varphi(x, s)\ ds,$$

Entonces, u es continuamente diferenciable y

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,s)\ ds.$$

Obs: 2.7: En las proposiciones anteriores, la compacidad de Ω puede ser intercambiada por la continuidad uniforme de φ y la integrabilidad en valor absoluto sobre Ω de $s \mapsto \varphi(x,s)$para cada $x \in U$. Sugerimos al lector formular las proposiciones en estos términos y escribir su respectiva demostración.

Obs: 2.8 (Advertencia): En todos estos resultados la hipótesis sobre la continuidad de la derivada parcial es necesaria, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9 (donde la derivada no pasa):

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Resulta que

$$u(x) := \int_0^1 \varphi(x,y)\ dy$$

puede ser calculada de manera que

$$u(x) = \frac{x}{2(1+x^2)} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces u es diferenciable y

$$u'(x) = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)^2} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

En particular $u'(0) = \frac{1}{2}$.

Sin embargo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto el $y \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y)$ es idénticamente 0 sobre $[0,1]$. Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,y)\ dy = 0.$$

Esto demuestra que

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \varphi(0,y)\ dy \neq \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,y)\ dy.$$

Lo que ocurre aquí es que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ no es una función continua de las variables (x,y): Se puede ver que no es continua en $(0,0)$ sobre las recta $y=x$. □

Ejemplo 2.10 (a pesar de la regularidad, la convergencia uniforme es necesaria)**:** Se sabe que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

Ahora, para $t>0$ haciendo el cambio de variable $x=ty$ obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ty)}{y}\ dy = \frac{\pi}{2}$$

Ahora, si pudiéramos intercambiar la derivada ∂_t con la integral nos quedaría la fórmula

$$\int_0^\infty \cos(ty)\ dy = 0$$

La cual es un sin sentido.

Para más contraejemplos y aplicaciones a este tipo de funciones (dentro de las matemáticas) puede consultar [Connd].

§2.2 Teoremas de convergencia

El problema de *intercambiar la derivada con la integral* y el de integrar término a término una serie convergente se reducen básicamente al de *intercambiar un límite con la integral*. De nuevo este problema es punto de encuentro para los métodos que aplicamos en el curso para estudiar EDP's.

Ya vimos que la noción elemental de la convergencia uniforme es una condición suficiente para intercambiar límites. Igualmente podemos aplicar los resultados mucho más generales que veremos a continuación.

Teorema 2.11 (Convergencia dominada)**:** Sea $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R}^N)$ que converge puntualmente a una función f. Si existe una función $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ no negativa tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx.$$

Obs: 2.12: En tanto que los valores tomados por una función sobre un conjunto de medida cero no afectan a su integral, es suficiente suponer que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ en casi todo punto, es decir, salvo en un conjunto de medida cero.

Igualmente es suficiente suponer que la propiedad $|f_n(x)| \leq g(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre en casi todo punto (salvo en un conjunto de medida cero).

Teorema 2.13 (Convergencia monótona)**:** Sea $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R}^N)$ tales que

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$$

Si existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)|\, dx \leq M \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} f(x)\, dx.$$

Para una demostración elemental de estos dos resultados puedes consultar [KFF99].

§2.2.1 Dependencia continua y diferenciable de un parámetro

Podemos aplicar los teoremas anteriores para conseguir criterios más generales que nos permiten derivar funciones definidas con integrales pasando la derivada bajo el signo de de integral.

Proposición 2.14 (Dependencia continua): Sean $Y \subset \mathbb{R}^M$ un abierto, $y_0 \in Y$ y $f : \mathbb{R}^N \times Y \to \mathbb{R}$ con las siguiente propiedades:

(i) Para cada $y \in Y$, la función $x \mapsto f(x,y)$ es integrable en $\mathbb{R}^N$,

(ii) para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$ la función $y \mapsto f(x,y)$ es continua en y_0,

(iii) existe una función $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ en $L^1(\mathbb{R})$ tal que, para todo $y \in Y$, $|f(x,y)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces la función

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\ dx$$

es continua en y_0.

Proposición 2.15 (Derivación bajo el signo integral): Sea $f : \mathbb{R}^N \times (a,b) \to \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades:

(i) Para cada $t \in (a,b)$, la función $x \mapsto f(x,t)$ es integrable en $\mathbb{R}^N$,

(ii) para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$ la función $t \mapsto f(x,t)$ es diferenciable (a,b),

(iii) existe una función $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ en $L^1(\mathbb{R})$ tal que para todo $t \in (a,b)$, $|f_t(x,t)| \leq g(x)$ casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces la función

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\ dx$$

es diferenciable en (a, b) y

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f_t(x, t)\; dx$$

§2.3 Teorema de Fubini

Finalmente, un resultado muy útil que usualmente es mal aplicado es el siguiente.

Teorema 2.16 (de Fubini): Sea $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ una función en $L^1(\mathbb{R}^{N+M})$. Entonces existe un subconjunto Z de medida cero de $\mathbb{R}^M$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^M \setminus Z$ la función de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida como $x \mapsto f(x, y)$ está en $L^1(\mathbb{R}^N)$. Además, la función $\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ dada por

$$y \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, y)\; dy & \text{si } y \in \mathbb{R}^M \setminus Z \\ 0 & \text{si } y \in Z \end{cases}$$

está en $L^1(\mathbb{R}^M)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, y)\; dx\; dy = \int_{\mathbb{R}^{M+N}} f(z)\; dz.$$

CAPÍTULO 3

Cálculo en superficies

Las siguientes integrales pueden tener varias interpretaciones; masa, área, volumen, además de las interpretaciones físicas. En esta sección veremos la definición y las propiedades fundamentales tanto de la integral sobre una curva y sobre una superficie. Para una referencia en español de las demostraciones e las ideas que sustentan las definiciones puedes puedes consultar [PC04].

§3.1 INTEGRAL DE LÍNEA

Definiremos la integral de una función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sobre una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ suave o suave a trozos (diferenciable salvo en una cantidad finita de puntos) como

$$\int_\gamma u \; dr := \int_a^b u(\gamma(t)) \;\; \|\gamma'(t)\| \;\; dt,$$

donde $\|\gamma'(t)\|$ es la norma euclidiana usual en $\mathbb{R}^N$. La intuición detrás de esta definición es la de considerar la sumas de Riemann que se obtienen al hacer particiones de la curva γ y calcular áreas de rectángulos cuyos vértices de la base yacen sobre γ y su altura depende de los valores que u asume sobre la curva entre los dos vértices de la base.

Ejemplo 3.1: Si u es la función idénticamente 1 sobre γ, entonces la integral

$$\int_\gamma dr = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \ dr$$

es la lóngitud de la curva γ, según la idea que vimos arriba.

Proposición 3.2: Sean γ y σ dos curvas suaves a trozos, u, v funciones de $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

(a)

$$\int_\gamma (\alpha u + v) \ dr = \alpha \int_\gamma u \ dl + \int_\gamma v \ dr$$

(b) Las curvas γ y σ pueden ser recorridas de una sola vez con una adecuada parametrización $\gamma \cup \sigma$, de manera que

$$\int_{\gamma\cup\sigma} u \ dr = \int_\gamma u \ dr + \int_\sigma u \ dr$$

Finalmente otra noción matemática importante (para la física) es la integral 'de linea' de un *campo vectorial* sobre una curva.

Definición 3.3: Sean un campo $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ y un curva (suave o suave a trozos) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$. La integral de linea de f sobre γ es

$$\int_\gamma f \cdot dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \ dt.$$

La interpretación física más usual de esta integral (y tal vez su razón de ser) es que calcula el trabajo, en tanto cantidad física, que se realiza al mover una partícula sobre la curva γ sometida igualmente al campo de fuerza f.

Si bien el cambio en la notación es sutil, no debemos confundir estos conceptos pues la primera integral, la de una función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nos habla más bien se su promedio (masa) sobre la curva, la integral de línea de una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ nos da información sobre la variación promedio del ángulo que forma f y la dirección de la curva.

Este tipo de integral satisface un propiedades parecidas las enunciadas en la Proposición 3.2.

Proposición 3.4: Sean γ y σ dos curvas suaves a trozos, f, q funciones de $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

(a)
$$\int_\gamma (\alpha f + g) \cdot dr = \alpha \int_\gamma f \cdot dr + \int_\gamma g \cdot dr.$$

(b) Las curvas γ y σ pueden ser recorridas de una sola vez con una adecuada parametrización $\gamma \cup \sigma$, de manera que
$$\int_{\gamma\cup\sigma} f \cdot dr = \int_\gamma f \cdot dr + \int_\sigma f \cdot dr.$$

(c) Si δ es exactamente la curva γ recorrida en sentido inverso entonces
$$\int_\gamma f \cdot dr = -\int_\delta f \cdot dr$$
.

Antes de pasar a dimensiones mayores o a integrales sobre otros objetos *geométricos* repasaremos el Teorema de Green en dimensión dos. Este teorema nos permite calcular la integral de ciertas funciones en un dominio con *frontera bien comportada* en términos de una integral sobre su frontera.

Primero diremos lo que significa que un dominio tenga una frontera bien comportada.

Definición 3.5: Sean Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^N$ y $k \in \mathbb{N}$. Diremos que $\partial\Omega$ es clase $\mathcal{C}^k$ si para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe un $r > 0$ y una función $M : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ clase $\mathcal{C}^k$ tal que, salvo una permutación de los ejes,

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \ : \ x_N > M(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\},$$

Esta definición podría ser oscura, sin embargo sólo nos dice que la frontera de Ω es localmente puede ser vista localmente como la gráfica de una función $\mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$.

Obs: 3.6: Para los abiertos Ω con frontera clase $\mathcal{C}^1$ siempre existe, para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ un vector normal unitario que apunta hacia afuera de Ω.

Ya tenemos todo lo necesario para enunciar el teorema de Green en $\mathbb{R}^2$, cuya demostración no incluiremos.

Teorema 3.7 (Green): Sea Ω un abierto acotado con frontera clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Si u, v son funciones parcialmente diferenciables definidas en un abierto que contiene a Ω, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \cdot dr = \int_{\Omega} (u_x - v_y)\, dxdy.$$

Como corolario de este teorema obtenemos la siguiente fórmula:

$$\int_{\Omega} u_{x_1} = \int_{\partial\Omega} u\widehat{n}_1 \, dr, \tag{3.1}$$

donde $\widehat{n}_1$ es la primer coordenada de la aplicación normal unitaria $\widehat{n} = (\widehat{n}_1, \widehat{n}_2)$ en $\partial\Omega$.

Aplicando está identidad obtenemos la conocida fórmula de integración por partes

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v = -\int_{\Omega} u v_{x_i} + \int_{\partial\Omega} uv\widehat{n}_i \, dr,$$

Demostración de (3.1). La frontera de Ω hereda la orientación de $\mathbb{R}^2$,por lo tanto tomamos una parametrización $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ de $\partial\Omega$ en contra de las manecillas del reloj. De esta manera, el vector normal unitario a $\partial\Omega$ está dado por $\widehat{n}(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$. Ahora bien, aplicando el Teorema de Green al campo $\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_x \, dxdy &= \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \cdot dr = \int_a^b \begin{bmatrix} 0 \\ u(\gamma(t)) \end{bmatrix} \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_a^b u\gamma_2'(t) \, dt = \int_a^b u\gamma_2'(t) \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} \, dt = \int_{\partial\Omega} u\widehat{n}_1 \, dr. \end{aligned}$$

Para la integral de la parcial respecto a y consideramos al campo $\begin{bmatrix} -u \\ 0 \end{bmatrix}$ y el cálculo es análogo.

$\square$

§3.2 Integral en superficies

El caso que ocurrirá con frecuencia cuando estudiemos ecuaciones diferenciales en dimensiones es que tengamos que integral ciertas funciones sobre la frontera de dominios en $\mathbb{R}^N$, si bien lo que usualmente nos interesan son las estimaciones es necesario recordar que estas integrales tienen sentido y que dependen de parametrizaciones del dominio.

En esta sección veremos el ejemplo de integrales sobre superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$, veremos explícitamente como estas integrales están en términos de un dominio en $\mathbb{R}^2$ y la manera de calcularlas.

Sea Σ una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ con parametrización $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Definición 3.8: Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^3$ que contiene a Σ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de u sobre Σ es

$$\int_\Sigma u \ \mathrm{dS} = \int_D u(\sigma) \ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| dxdy,$$

donde

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial_x \sigma_1 \\ \partial_x \sigma_2 \\ \partial_x \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \begin{bmatrix} \partial_y \sigma_1 \\ \partial_y \sigma_2 \\ \partial_y \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Esta fórmula surge de la necesidad de calcular la masa de la función u sobre la superficie Σ. Entonces lo que hace es aproximar esta masa con la masa de cubos, de manera que los vértices de la base yace sobre Σ y cuya altura depende de los valores de u sobre el cubo. Obtenemos estos cubos usando la parametrización σ al hacer una cuadriculación de su dominio D. Cuando hacemos tender a cero los lados de la base de los cubos y sumamos todos, lo que obtenemos es una suma de Riemann de la integral de la derecha.

Esta manera de calcular integrales es una generalización de la idea que se siguió para calcular el área sobre la masa sobre la curva el la sección anterior. Además, es la que se generaliza para el caso de una hipersuperficie de dimensión $N-1$ inmersa en $\mathbb{R}^N$, sin embargo sólo en los casos para $N = 2, 3$ tenemos tenemos una clara intuición al respecto.

Ejemplo 3.9: Sea $u \in C(\mathbb{R}^2)$ y definamos $\bar{u}(x_1, x_2, x_3) := u(x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Para $t > 0$, sea

$$S_t := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2\}$$

la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio t centrada en 0. Queremos calcular la integral de superficie

$$\int_{S_t} \bar{u}(y)\, dy.$$

Sean $B_t := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 < t^2\}$ la bola en $\mathbb{R}^2$ de radio t centrada en 0, $S_t^+ := S_t \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 > 0\}$ la media esfera, y sea $\sigma : B_t \to S_t^+$ una función dada por

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) := \left(x_1, x_2, \sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}\right).$$

Entonces S_t^+ es una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ con parametrización σ. Siguiendo la Definición 3.8 tenemos que

$$\int_{S_t^+} \bar{u}(y)\, dy = \int_{B_t} u(x_1, x_2) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \times \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \right\| d(x_1, x_2).$$

Notemos que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \times \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{t^2 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{x_2^2}{t^2 - x_1^2 - x_2^2} + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - x_1^2 - x_2^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}}.$$

Entonces,

$$\int_{S_t^+} \bar{u}(y)\, dy = t \int_{B_t} \frac{u(x_1, x_2)}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}}\, d(x_1, x_2).$$

Finalmente, como $\bar{u}$ es constante en la variable x_3, tenemos que

$$\int_{S_t} \bar{u}(y)\, dy = 2 \int_{S_t^+} \bar{u}(y)\, dy = 2t \int_{B_t} \frac{u(x_1, x_2)}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}}\, d(x_1, x_2).$$

Ejemplo 3.10: En particular, si f es la función idénticamente 1 en U, entonces el área A de Σ es

$$A(\Sigma) = \int_\Sigma \mathrm{dS}\,.$$

Ahora consideremos una hipersuperficie Σ inmersa en $\mathbb{R}^N$ con parametrización $\sigma : D \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ (el caso de las fronteras suaves de ciertos dominios). De nuevo ocurre que $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, donde $\sigma_k : D \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$.

Entonces, generalizando el método para integrales sobre líneas y superficies tenemos:

Definición 3.11: Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$ que contiene a Σ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la integral de superficie de u sobre Σ es

$$\int_\Sigma u \;\mathrm{dS} = \int_D u(\sigma(y))\; \left|\det\nolimits_N \left[\partial_{y_1}\sigma(y),\; \cdots,\; \partial_{y_{N-1}}\sigma(y),\; \widehat{n}(y)\right]\right| dy,$$

donde

$$\partial_{y_i}\sigma(y) = \begin{bmatrix} \partial_{y_i}\sigma_1(y) \\ \partial_{y_i}\sigma_2(y) \\ \vdots \\ \partial_{y_i}\sigma_{N-1}(y) \\ \partial_{y_i}\sigma_N(y) \end{bmatrix},$$

el operador $\det_N$ es el determinante para matrices $N \times N$ y $\widehat{n}(y)$ es el vector normal unitario al subespacio $\sigma'(y)(\mathbb{R}^{N-1})$, es decir al subespacio generado por $\partial y_1 \sigma(y), \ldots, \partial y_{N-1}\sigma(y)$ en tanto columnas de $\sigma'(y)$ como matriz de $N \times (N-1)$.

Es de ayuda aclarar que, como $\sigma'(y)(\mathbb{R}^{N-1})$ es un subespacio (vectorial) de dimensión $N-1$ de $\mathbb{R}^N$, por lo tanto este tiene un complemento ortogonal de dimensión 1, de tal complemento ortogonal es donde extraemos al vector normal unitario.

§3.3 TEOREMA DE GREEN-GAUSS E INTEGRACIÓN POR PARTES

Finalmente, mencionamos los teoremas más importantes de integración que relacionan las integrales sobre dominios en $\mathbb{R}^N$ con integrales sobre sus fronteras, que resultan ser hipersuperficies (siempre que sean lo suficiente regulares).

Sea Ω un abierto acotado con frontera clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3.12 (Teorema de Green-Gauss): Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es clase $\mathcal{C}^1$,

$$\int_\Omega u_{x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\widehat{n}_i \, dS,$$

donde $\widehat{n}_i$ es la $i-$ésima coordenada del vector normal unitario a $\partial\Omega$.

Esta es la misma fórmula que obtuvimos para el caso $N = 2$.

Si tenemos un campo vectorial $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ clase $\mathcal{C}^1$ y aplicamos el teorema anterior a la divergencia de U, obtenemos el clásico *teorema* *de la divergencia*:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} U \; dx = \int_{\partial\Omega} U \cdot \widehat{n} \; dS.$$

Ahora, si aplicamos el teorema de Green-Gauss al producto de dos funciones obtenemos:

Teorema 3.13 (Integración por partes)**:** Si $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son clase $\mathcal{C}^1$,

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v \; dx = -\int_{\Omega} u v_{x_i} \; dx + \int_{\partial\Omega} u \widehat{n}_i \; dS.$$

Teorema 3.14 (Identidades de Green)**:** Si $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son clase $\mathcal{C}^2$.

(a) $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} \; dS$, donde $\frac{\partial u}{\partial \widehat{n}}$ es la derivada de u en la dirección del vector normal exterior unitario $\widehat{n}$, i.e., $\frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} := \nabla u \cdot \widehat{n}$.

(b) $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \; dx = -\int_{\Omega} u \Delta v \; dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \widehat{n}} \; dS$

Capítulo 4

Series de Fourier

Sea u una función $2T-$periódica.

La expansión en serie trigonométrica de u es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right), \tag{4.1}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(y)\ dy,$$
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(y)\cos\left(\frac{k\pi}{T}y\right)\ dy,$$
$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(y)\sin\left(\frac{k\pi}{T}y\right)\ dy.$$

Estos son los coeficientes de Fourier de u.

Si u admite tal expansión en series, es decir, si u coincide con (4.1) en cada punto de $[-L, L]$ ocurre que

(i) Si u es impar ($u(-x) = -u(x)$), tenemos $a_k = 0$ para todo $k \geq 0$ y

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} u(y)\sin\left(\frac{k\pi}{T}y\right)\ dy$$

y consecuentemente

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right)$$

(i) Si u es par ($u(-x) = u(x)$), tenemos $b_k = 0$ para todo $k \geq 1$ y

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(y)\cos\left(\frac{k\pi}{T}y\right)\, dy$$

y consecuentemente

$$u(x) = \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right)$$

Ahora bien, verificar la convergencia de la serie (4.1) por si sola o si $u \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right)$ no es un asunto inmediato (ni mucho menos sencillo).

Naturalmente tendremos la convergencia el L^2 (mínimos cuadrados). Definamos

$$S_N := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right)$$

Teorema 4.1: Si $u \in L^2(-L, L)$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-T}^{T} [u(y) - S_N(y)]^2 \, dy = 0$$

y se cumple la *identidad de Parseval*:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Para hablar de convergencia puntual de la serie introducimos la siguiente noción.

Condición de Dirichlet: La función u satisface la condición de Dirichlet en $[-T, T]$ si u es continua en $[-T, T]$ salvo posiblemente en un número finito de discontinuidades de salto. Además, $[-T, T]$ admite una partición finita de intervalos donde u es monótona en cada intervalo de la partición.

Teorema 4.2: Si u satisface la condición de Dirichlet en $[-L, L]$, entonces

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right)$$

en cada punto de continuidad x de u.

Bibliografía

[Cla15] Mónica Clapp. *Análisis matemático*. papirhos, IM-UNAM, México, 2015.

[Connd] Keith Conrad. Differentiating under the integral sign. https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf, n.d.

[Edw73] C.H. Edwards. *Advanced Calculus of Several Variables*. Academic Press, 1973.

[Fol02] G.B. Folland. *Advanced Calculus*. Featured Titles for Advanced Calculus Series. Prentice Hall, 2002.

[KFF99] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, and S.V. Fomin. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Number v. 1 in Dover books on mathematics. Dover, 1999.

[PC04] Javier Paéz Cárdenaz. *Cálculo integral de varias variables*. Editorial: Prensas de Ciencias, 2004.

[Sal16] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*. UNITEXT. Springer International Publishing, 2016.

[Tao16] T. Tao. *Analysis II: Third Edition*. Texts and Readings in Mathematics. Springer Singapore, 2016.