Probabilidad

Momentos y esperanza condicional

2024-2

Introducción

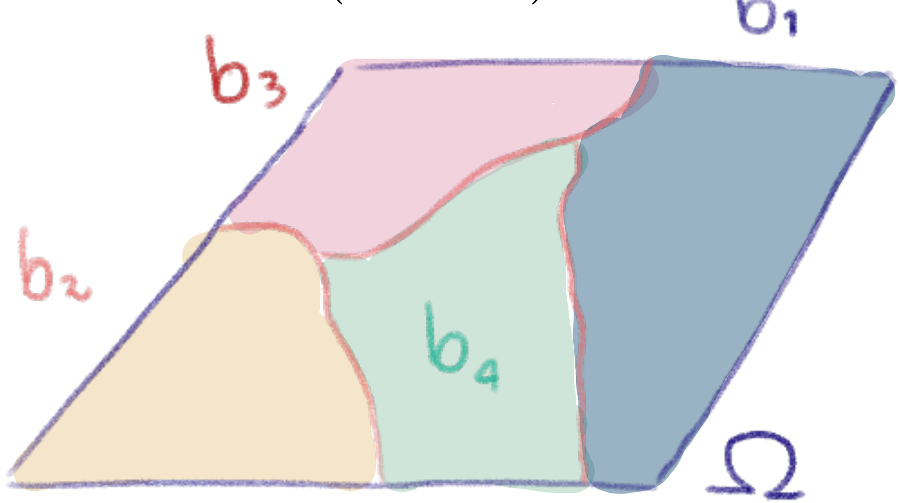
Objetivo

Entender la noción de esperanza de una variable aleatoria.

Piensen en la venta de un terreno:

- ✔ El área del terreno sera una unidad.
- ✔ el terrenos se divide en n lotes (indivisibles por razones de compraventa)
- ✔ Sean Ω el terreno, $\mathbb{P}(A)$ el área de la región A. Sea $X(\omega)$ el precio por unidad de área que contiene el punto ω.

Si el precio del k-ésimo lote es b_k, entonces la región en la que X es igual a b_k tiene área $\mathbb{P}(X = b_k)$



Valor total del terreno:

$$\mathbb{E}(X) = b_1 \cdot \mathbb{P}(X = b_1) + b_2 \cdot \mathbb{P}(X = b_2) + \dots$$

- ✔ $\mathbb{E}[X]$ es la integral de la función X sobre Ω
- ✔ como el área total de Ω es $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, entonces $\mathbb{E}[X]$ es el precio promedio por unidad.

- ✔ Si pensamos en Ω como un espacio muestral y a $\mathbb{P}$ como una medida de probabilidad, entonces X se convierte en una variable aleatoria
- ✔ la integral de X que obtuvimos se llama la *la esperanza* de X
- ✔ interpretación

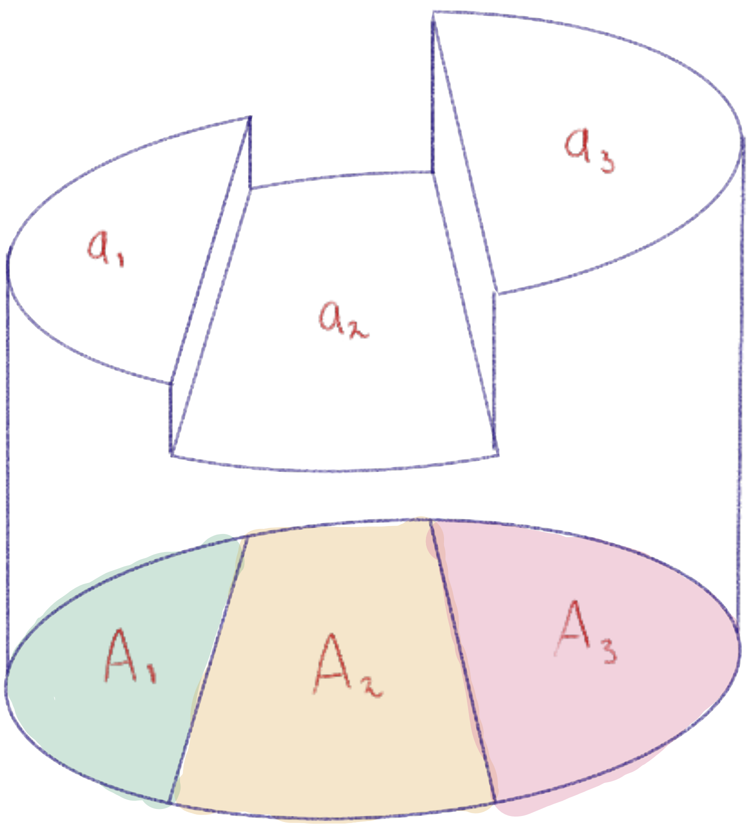
  $E(X)$ el promedio de los valores de X en Ω

Valor esperado

Sean Ω un espacio muestral, $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad y X una variable aleatoria discreta. Supongamos que X toma los valore no negativos $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{R}_+$. Sea $A_k = \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = a_k\}$.

$$\mathbb{E}[X] = a_0\mathbb{P}(A_0) + a_1\mathbb{P}(A_1) + a_2\mathbb{P}(A_2) + \cdots$$

$\mathbb{P}(\Omega)$



$\mathbb{P}(\Omega)=1$

$\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

Definición 1 (Esperanza de una v.a. discreta)

La esperanza de una variable aleatoria discreta X que toma valores en el conjunto $E \subset \mathbb{R}_+$ es

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{a \in E} a \mathbb{P}(X = a).$$

Esta definición se extiende primero a variables aleatorias real valuadas no negativas y después a variables aleatorias arbitrarias.

metateorema

- variables aleatorias discretas $\downarrow$
- variables aleatorias no negativas $\downarrow$
- variables aleatorias real valuadas

Teorema 2

Supongámonos que X es una variable aleatoria no negativa. Entonces, es posible hallar una sucesión de variables aleatorias discretas $X_1, X_2, \ldots$ tales que

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \cdots$$

y

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ casi seguramente para } \omega \in \Omega.$$

Demostración.

Es una parte de la demostración de [1, Theorem 9.1.]. □

Si (X_n) son como en el teorema anterior, entonces, por nuestra definición de esperanza se sigue que

$$\mathbb{E}[X_1] \leq \mathbb{E}[X_2] \leq \mathbb{E}[X_3] \leq \cdots$$

Definición 3

Supongámonos que X es una variable aleatoria no negativa y que (X_n) es una sucesión de variables aleatorias discretas no negativas tales que

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \cdots$$

y

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ casi seguramente para } \omega \in \Omega.$$

Entonces, definimos la esperanza de X como

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right].$$

Finalmente, si X es una variable aleatoria arbitraria definimos

$$X_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0, \\ X & \text{si } X \geq 0. \end{cases}$$

y

$$X_- = \begin{cases} -X & \text{si } X < 0, \\ 0 & \text{si } X \geq 0. \end{cases}$$

De manera que

$$X = X_+ - X_-.$$

Definición 4 (Esperanza de una variable aleatoria)

Si X es una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}[X_+], \mathbb{E}[X_-] < \infty$, entonces su esperanza es

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-].$$

Si no se cumple que $\mathbb{E}[X_+], \mathbb{E}[X_-] < \infty$ deducimos que la variable aleatoria no tiene esperanza.

Lo que sigue...

- ✔ $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\ dt$ identidades integrales
- ✔ Teoremas de convergencia
- ✔ Desigualdades Jensen, Cauchy-Schwartz, Chebyshev
- ✔ Función generadora de momentos, funcion caracteristica
- ✔ Esperanza condicional

Manifiesto de Enseñanza

Sostengo los Axiomas que Federico Ardila postula en su comunicado para la AMS Todos Cuentan [2]:

Axioma 1. El talento matemático se distribuye de manera equitativa entre diferentes grupos, independientemente de las fronteras geográficas, demográficas y económicas.
Axioma 2. Todos pueden tener experiencias matemáticas alegres, significativas y empoderadoras.
Axioma 3. Las matemáticas son una herramienta poderosa y maleable que puede ser moldeada y utilizada de manera diferente por diversas comunidades para satisfacer sus necesidades.
Axioma 4. Cada estudiante merece ser tratado con dignidad y respeto.

Referencias

[1] Jacod, J., & Protter, P. (2004). Probability Essentials. 2nd Edition, Berlin: Springer.

[2] Ardila-Mantilla, Federico. (2016). Doceamus: Todos Cuentan: Cultivating Diversity in Combinatorics. Notices of the American Mathematical Society. 63. 1164-1170. 10.1090/noti1434.