Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con dist. F.

Teorema: Para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, tenemos

$$F_{X_{(k)}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} \int_0^{F(x)} y^{k-1}(1-y)^{n-k}\, dy$$

$$F_{X_{(k)}}(x) = F_Z(F(x)) \quad \text{con} \quad Z \sim \beta(\underbrace{k}_{\alpha}, \underbrace{n+1-k}_{\beta})$$

Rem. Para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, sea

$A_i(x) = \{$ exactamente i de las $X_1, \dots, X_n$ son menores o iguales a $x \}$

$=$

$\{$ exactamente i de las n observaciones son $\leq x \}$

$\circledast$

$\{ X_{(k)} \leq x \} = \{$ al menos k observaciones de las n sean $\leq x \}$

Como $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq \cdots \leq X_{(k)}$, $\boxed{\subseteq}$ es clara.

Supongamos que para un $\omega \in \Omega$ al menos k de de los números $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ son $\leq x$.

(Reducción al absurdo)

Si $X_{(k)}(\omega) > x \Rightarrow X_{(k)} > \underbrace{\text{al menos } k}$ observaciones

$\therefore$ $X_{(k)}$ no puede ser la k-ésima más pequeña

$\therefore$ $X_{(k)} \leq x$ esto demuestra $\boxed{2}$

$\therefore$ (*) se cumple.

Así, $F_{X_{(k)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{n} A_i\right)$

$$= \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}(A_i(x)) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i}$$

pues independencia + $\mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x)$

$\Rightarrow$ # observaciones $\leq x \sim \text{Binom}(F(x), n)$

Diferenciando demostramos que

$$\frac{d}{dz}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i} z^{i}(1-z)^{n-i} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} z^{k-1}(1-z)^{n-k}$$

Como $k \geq 1$, integrando de 0 a $F(x)$ obtenemos

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i} F(x)^{i}(1-F(x))^{n-i} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_{0}^{F(x)} z^{k-1}(1-z)^{n-k}\,dz$$

Usamos $\Gamma(n+1) = n!$ $\longrightarrow$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)}\int_{0}^{F(x)} z^{k-1}(1-z)^{n+1-k-1}\,dz$$

$\blacksquare$

§§ Teorema de cambio de variable.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. con densidad conjunta f_X $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Sea $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación clase C^1 invertible.

Sea $Y = g(X)$ el vector aleatorio dado por

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

con $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$

$g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema: La densidad de Y es

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot \left| \underbrace{\det(d_y h)}_{\text{jacobiano.}} \right|$$

para $h = g^{-1}$.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\quad h_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad y = (y_1, \dots, y_m)$

$$d_y h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial y_m} \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \frac{\partial h_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla h_1(y) \\ \nabla h_2(y) \\ \vdots \\ \nabla h_m(y) \end{bmatrix}$$

- g transforma coordenadas $x=(x_1,\dots,x_n)$ a coordenadas $y=(y_1,\dots,y_n)$

- h transforma coordenadas $y=(y_1,\dots,y_n)$ a $x=(x_1,\dots,x_n)$.

a veces se escribe $x=h(y)$ y así

$$dh(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \frac{\partial x_n}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo. X, Y iid $N(0,1)$. $\Rightarrow X+Y, X-Y$ iid $N(0,2)$

Sea $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Si $g(x,y) = (u,v)$ $\Rightarrow$

$h(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right)$.

Así, $d_{(u,v)} h = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ y $\det(d_{(u,v)} h) = -\frac{1}{2}$

Con $(U,V) = g(X,Y)$ tenemos

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) \cdot |d_{(u,v)} h|$$

$$= f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{2}\right)^2} \qquad \frac{1}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{2}}}_{f_U(u)} \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}v^2/2}}_{f_V(v)}$$

$\therefore\ U = X+Y \sim N(0,2)$

$\therefore\ V = X-Y \sim N(0,2)$